Prova di Matematica: *Limiti di una funzione*

27.02.2015
prof. Mimmo Corrado
Tempo 60 minuti

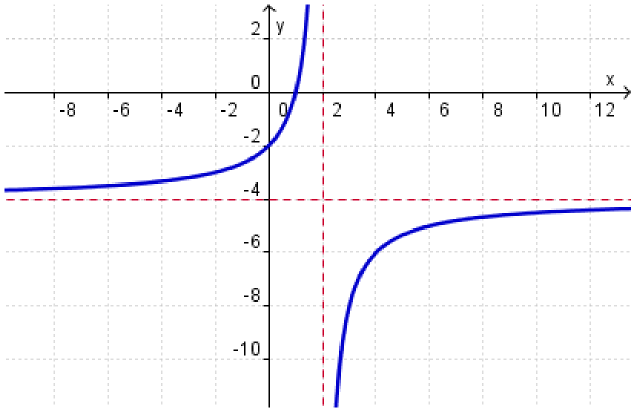
Alunno: ____ Classe: *5B L. Classico*

1. Calcola i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3x^2+1} \qquad \lim_{x\to +\infty} 2x^3 \cdot \log_{\frac{2}{3}} x \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{5x-4x^2}{3x^2+1} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-4}{x^3-8}$$

2. Applicando la definizione, verifica i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5) = 1 \qquad \lim_{x\to 5} \frac{30}{(x-5)^2} = +\infty$$



3. Dall'esame del grafico della funzione a lato, indica:

$\lim_{x\to +\infty} f(x) \;=$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) \;=$

$\lim_{x\to 0} f(x) \;=$

4. Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = (-2)^+ \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 3^-$$

Soluzione

1. Calcola i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{3x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} 2x^3 \cdot \log_{\frac{2}{3}} x \;=\; (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty \;.$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5x-4x^2}{3x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty} =?\right)$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{5x-4x^2}{3x^2+1} \;=\; \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\cdot\left(\frac{5}{x}-4\right)}{x^2\cdot\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} \;=\; \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{5}{x}-4}{3+\frac{1}{x^2}} = -\frac{4}{3}$$

$$perch\grave{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{5}{x} = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-4x-4}{x^3-8} = \left(\frac{0}{0} =?\right)$$

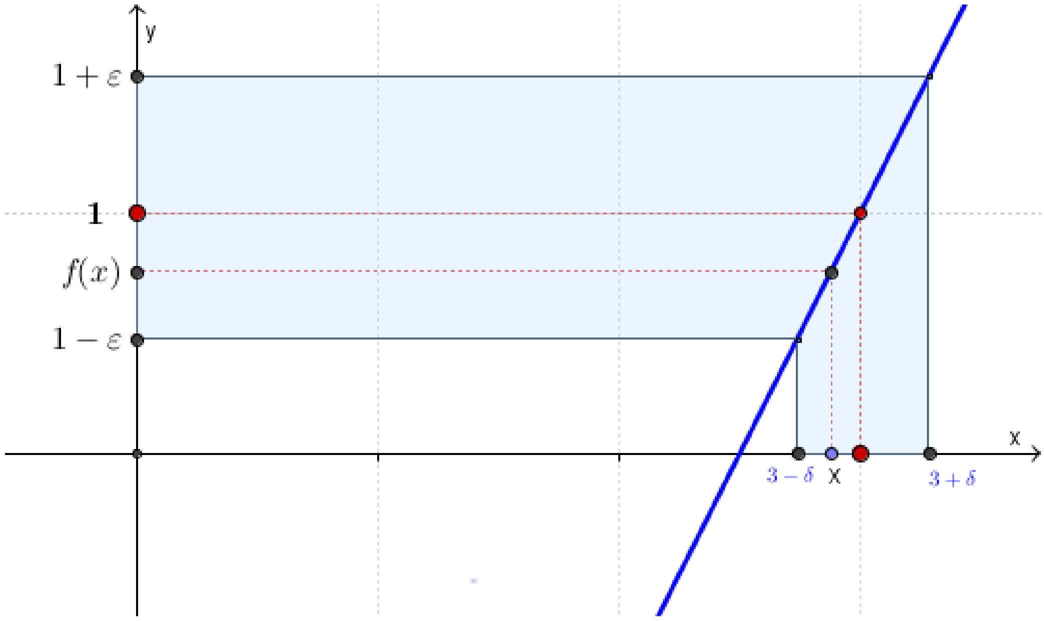
scomponiamo in fattori il polinomio che da origine alla forma indeterminata:

	3	−4	−4
2		+6	+4
	3	+2	=

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(3x+2)}{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)} \;=\; \lim_{x\to 2} \frac{3x+2}{x^2+2x+4} \;=\; \frac{8}{12} \;=\; \frac{2}{3}\;.$$

2. Applicando la definizione, verifica i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 3}(2x-5) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \boldsymbol{I_3} =]\mathbf{3}-\boldsymbol{\delta}\,,\mathbf{3}+\boldsymbol{\delta}[\quad / \quad |(\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\mathbf{5})-\mathbf{1}| < \varepsilon\,, \quad \forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I_3}, \;\; \boldsymbol{x}\neq \mathbf{3}$$



Occorre verificare che la disequazione $|2x-5-1| < \varepsilon$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno di 3.
Risolviamo pertanto la disequazione: $|2x-5-1| < \varepsilon$

$|2x-6| < \varepsilon\,;\qquad -\varepsilon < 2x-6 < +\varepsilon\,;\qquad 6-\varepsilon < 2x < 6+\varepsilon\,;\qquad 3-\frac{\varepsilon}{2} < x < 3+\frac{\varepsilon}{2}\,.$

Tenendo conto del dominio, l'insieme delle soluzioni è l'intorno di 3 $\quad I_3 \;=\; \left]3-\frac{\varepsilon}{2}\,,\; 3+\frac{\varepsilon}{2}\right[$ privato del punto 3 .

Il limite è pertanto verificato. $\left(Il\ valore\ di\ \delta \;\;\text{è}\;\; \delta = \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{30}{(x-5)^2} = +\infty$	$\Leftrightarrow$	$\forall M > 0 \quad \exists\, I_5 = \left]5-\delta\,, 5+\delta\right[\quad / \quad \dfrac{30}{(x-5)^2} > M\,, \quad \forall x \in I_5 - \{5\}$

Occorre verificare che la disequazione $\frac{30}{(x-5)^2} > M$ è soddisfatta per ogni x appartenente ad un intorno di 5 .

Risolviamo pertanto la disequazione: $\frac{30}{(x-5)^2} > M$

Essendo i due membri entrambi positivi, la disequazione può essere risolta trasformando i due membri nei loro reciproci e cambiando il verso della disuguaglianza:

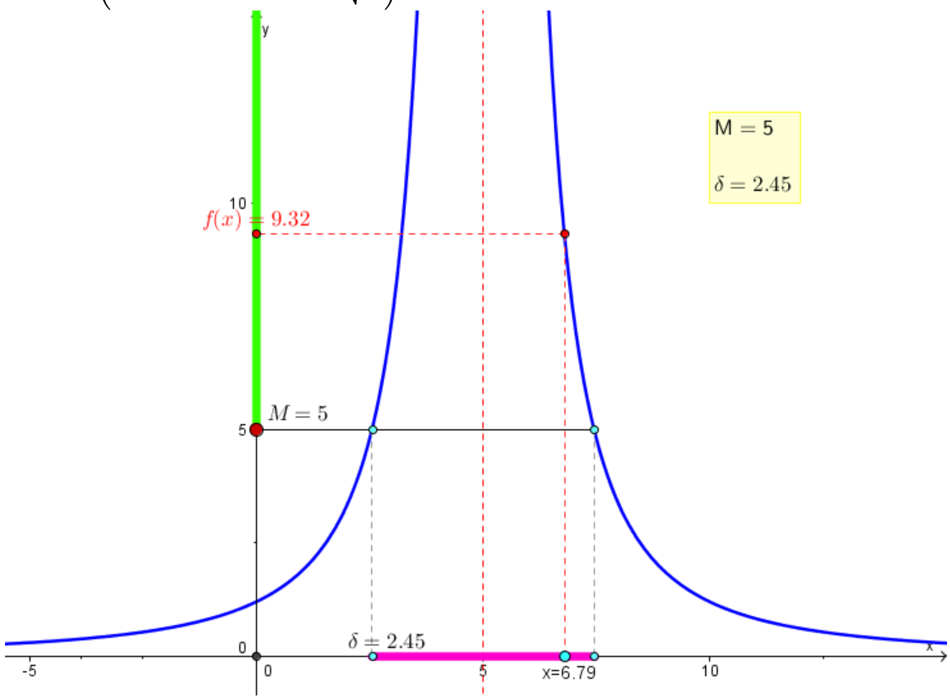
$\frac{(x-5)^2}{30} < \frac{1}{M}$; $\qquad (x-5)^2 < \frac{30}{M}$;

applicando la radice quadrata ad entrambi i membri si ottiene:

$|x-5| < \sqrt{\frac{30}{M}}$; $\qquad -\sqrt{\frac{30}{M}} < x-5 < +\sqrt{\frac{30}{M}}$; $\qquad 5-\sqrt{\frac{30}{M}} < x < 5+\sqrt{\frac{30}{M}}$.

Tenendo conto del dominio, l'insieme delle soluzioni è l'intorno di 5 $\quad I_5 = \left]5-\sqrt{\frac{30}{M}}\,,\ 5+\sqrt{\frac{30}{M}}\right[$ privato del punto 5 .

Il limite è pertanto verificato. $\qquad \left(\textit{Il valore di } \delta \text{ è } \boldsymbol{\delta} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{30}}{\boldsymbol{M}}} \right)$.

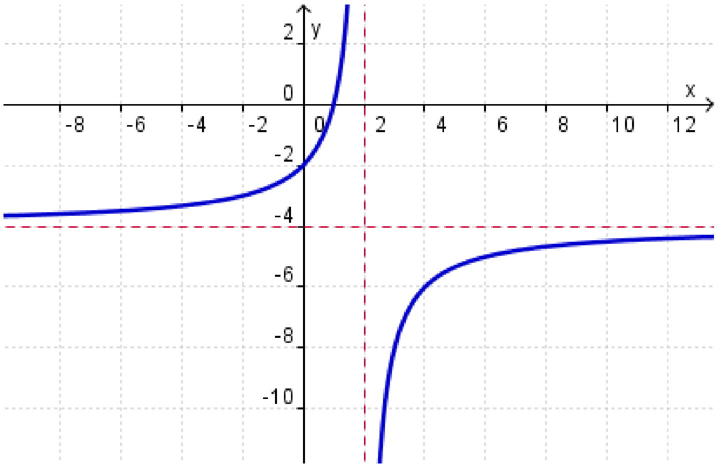


1. Dall'esame del grafico della funzione a lato, indica:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (-4)^-$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2$$



2. Traccia il grafico di una funzione che abbia le seguenti proprietà:

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = (-2)^+$ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 3^-$