Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2014-2015

Prova di Matematica: *Limiti e continuità di una funzione*

Alunno: ______________________________________ Classe: *5B L. Classico*

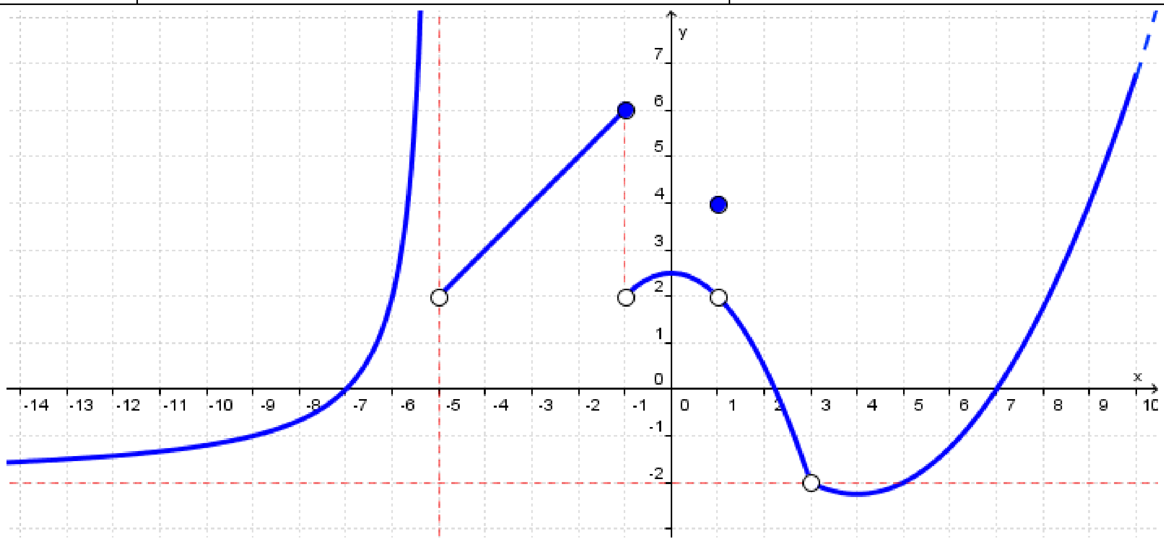
29.04.2015
prof. Mimmo Corrado
Tempo 60 minuti

1. Calcola i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{4x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2\,ln\,(1+5x)}{sin\,3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1+ln(1+x)-cos\,x}{3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{ln(x+2)-ln\,2}{3x}$$

2. Dall'analisi del grafico della funzione $y=f(x)$ sotto rappresentata, determina:

<table>
<tr><td>Dominio:</td><td colspan="2">Asintoti:</td><td>$f(1)=$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Punti di discontinuità
e tipo di discontinuità</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>



3. Individua i punti di dicontinuità della funzione $f(x)=\frac{|x^2-3x+2|}{2-x}$ e la relativa specie.

4. Stabilisci se per la funzione $f(x)=ln(x^2-2x-3)$ vale il **Teorema di Weierstrass** nell'intervallo $[4\,,6]$.

Soluzione

1. Calcola i seguenti limiti di funzioni:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{4x} \quad = \quad (1^{\infty} = ?)$$

$$= \quad \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{3}{x}\right)^{4x} \quad = \quad \lim_{x\to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x}$$

Poniamo $-\frac{3}{x} = \frac{1}{t}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x = -3t$ $\qquad$ Per $x \to -\infty$ $\quad t \to +\infty$

Sostituendo si ha:

$$= \quad \lim_{t\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{-3t\cdot 4} \quad = \quad \lim_{t\to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{-12} \quad = \quad e^{-12} \quad = \quad \frac{1}{e^{12}} \ .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\, ln\ (1+5x)}{sin\, 3x} \quad = \quad \left(\frac{0}{0} =?\right)$$

$$= \quad \lim_{x\to 0}\ 2 \cdot \frac{3x}{sin\, 3x} \cdot \frac{ln\ (1+5x)}{5x} \cdot \frac{5}{3} \quad = \quad 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{3} \quad = \quad \frac{10}{3} \ .$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + ln(1+x) - cos\, x}{3x} \quad = \quad \left(\frac{0}{0} =?\right)$$

$$= \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{1 - cos\, x}{x} + \frac{ln(1+x)}{x}\right] \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot (0+1) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(x+2) - ln\, 2}{3x} \quad = \quad \left(\frac{0}{0} =?\right)$$

$$= \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot [ln(x+2) - ln\, 2] \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot ln \frac{x+2}{2} =$$

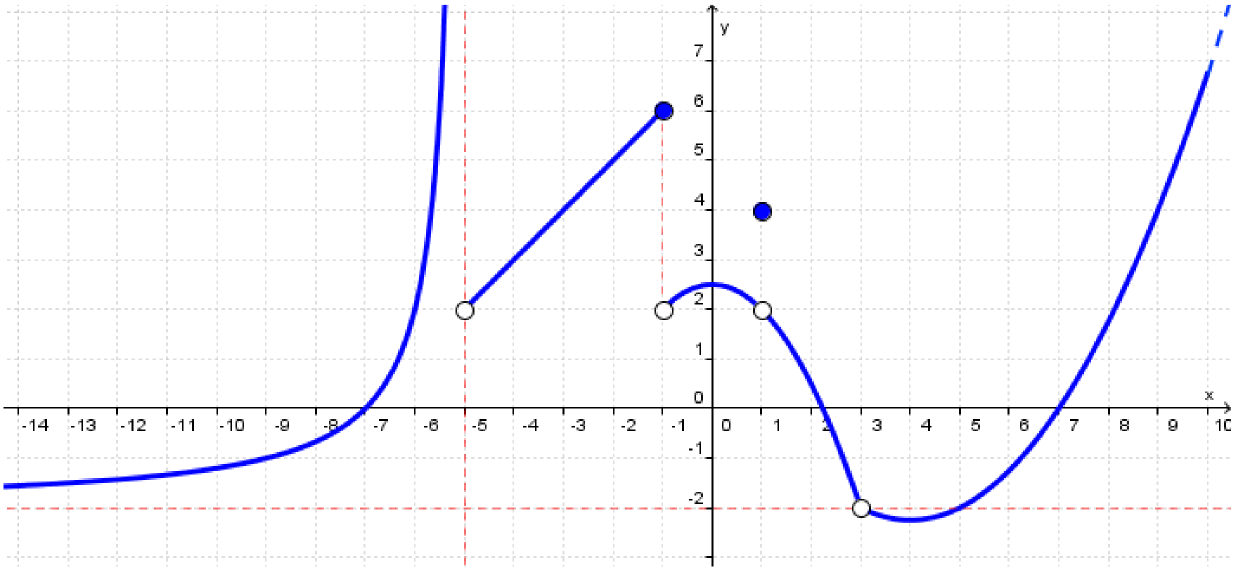
$$= \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot ln \left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{3} \cdot ln \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Poniamo $\frac{x}{2} = \frac{1}{t}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x = \frac{2}{t}$ $\qquad$ Per $x \to 0$ $\quad t \to \infty$ $\qquad$ Sostituendo si ha:

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{t\to \infty}\ ln \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}} \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot \lim_{t\to \infty}\ ln \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{1}{2}} \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot ln\, e^{\frac{1}{2}} \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{6}.$$

2. Dall'analisi del grafico della funzione $y = f(x)$ sotto rappresentata, determina:

<table>
<tr><td colspan="2">Dominio: $\{x \in R\ /x \neq -5\ \wedge\ x \neq 3\}$</td><td colspan="3">Asintoti: $x = -5$ A. V. a sinistra $\quad y = -2$ A. O. a sinistra</td><td>$f(1) = 4$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Punti di discontinuità e tipo di discontinuità</td><td colspan="2">$x = -5$ è un punto di discontinuità di 2ª specie</td><td colspan="3">$x = -1$ è un punto di discontinuità di 1ª specie</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = 1$ è un punto di discontinuità di 3ª specie</td><td colspan="3">$x = 3$ è un punto di discontinuità di 3ª specie</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$</td><td>$\lim_{x \to -5^+} f(x) = 2$</td><td>$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 6$</td><td>$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$</td><td>$\lim_{x \to 3} f(x) = -2$</td><td>$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$</td></tr>
</table>



3. Individua i punti di dicontinuità della funzione $f(x) = \frac{|x^2-3x+2|}{2-x}$ e la relativa specie.

Soluzione

Il dominio della funzione è $D = \{x \in R\ /\quad x \neq 2\}$

La funzione è il quoziente di due funzioni continue. I suoi punti di discontinuità sono i punti in cui si annulla il denominatore. In questo caso $x = 2$ è un punto di discontinuità della funzione.

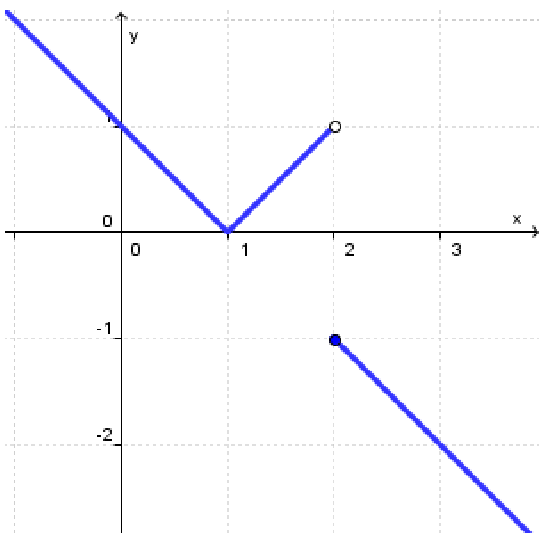
Stabiliamo il tipo di discontinuità.

La funzione può essere esplicitata nella forma:

$$f(x) = \frac{|x^2-3x+2|}{2-x} = \begin{cases} \frac{+(x^2-3x+2)}{2-x} & se\ \ x^2-3x+2 \geq 0 \\ \frac{-(x^2-3x+2)}{2-x} & se\ \ x^2-3x+2 < 0 \end{cases}$$ cioè:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)} & se\ \ x \leq 1\ \vee\ x \geq 2 \\ \frac{-(x-1)(x-2)}{-(x-2)} & se\ \ 1 < x < 2 \end{cases}$$ cioè:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & se\ \ x \leq 1\ \vee\ x \geq 2 \\ +x-1 & se\ \ 1 < x < 1 \end{cases}$$



Calcoliamo i limiti destro e sinistro della funzione per $x \to 2$.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x+1) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (+x-1) = +1$$

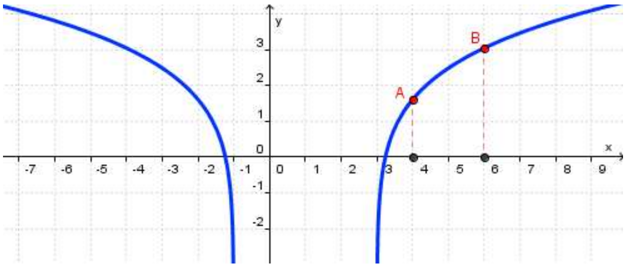
Poiché il limite destro e il limite sinistro esistono finiti e sono diversi, $x = 2$ è un punto di discontinuità di **prima specie**.

Il salto della funzione vale $|l^+ - l^-| = |-1-1| = 2$.

4. Stabilisci se per la funzione $f(x) = ln(x^2 - 2x - 3)$ vale il **Teorema di Weierstrass** nell'intervallo $[4\,,6]$.

Il Dominio della funzione è $D = \{x \in R \;\; / \;\; x < -1 \;\; \vee \;\; x > 3\}$

Infatti: $x^2 - 2x - 3 > 0$;



$$x^2 - 2x - 3 = 0 \;\; ; \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = +3 \end{matrix}$$

La funzione è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[4\,,6]$.
Pertanto, in tale intervallo, vale il **Teorema di Weierstrass**