Prova di Matematica : Equazioni, disequazioni e problemi di I grado

Alunno: ____ *Classe: 1B* *L. Scientifico*

1. Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x :

$$\frac{x}{x-3}-\frac{1-x}{3x-x^2}-\frac{1}{x}=1 \qquad\qquad \frac{2-x}{x-1}-\frac{2a}{2-2x}=\frac{1-a}{2a}$$

2. Risolvi la seguente disequazione letterale :

$$k\cdot(x+2)\geq 2+(x-2)\cdot(k+1)-kx \ ;$$

3. Risolvi i seguenti problemi:

In un triangolo rettangolo ABC la misura della mediana relativa all'ipotenusa BC è $2\ cm$ in meno dei $\frac{3}{5}$ dell'ipotenusa stessa e il cateto AB è i $\frac{3}{5}$ dell'ipotenusa. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo.

Sia $ABCD$ un parallelogramma. Costruisci, esternamente al parallelogramma, i triangoli equilateri BCE e ADF . Dimostra che il quadrilatero $AECF$ è un parallelogramma.

Soluzione

1.A Risolvi le seguenti equazioni nell'incognita x :

$\frac{x}{x-3} - \frac{1-x}{3x-x^2} - \frac{1}{x} = 1$ $\qquad$ $C.E.: x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 3$

$\frac{x}{x-3} - \frac{1-x}{-x(x-3)} - \frac{1}{x} = 1$ $\qquad$ $m.c.m. = x \cdot (x-3)$

$x^2 + (1-x) - (x-3) = x \cdot (x-3)$;

$x^2 + 1 - x - x + 3 = x^2 - 3x$;

$+1 - x - x + 3 = -3x$;

$-x - x + 3x = -1 - 3$

$x = -4$ Accettabile.

1.B Risolvi la seguente equazione letterale nell'incognita x :

$\frac{2-x}{x-1} - \frac{2a}{2-2x} = \frac{1-a}{2a}$

Le condizioni di esistenza dell'equazione sono: $C.E.:\ a \neq 0$.

Le condizioni di accettabilità delle soluzioni sono: $C.A.:\ x \neq 1$

$\frac{2-x}{x-1} - \frac{2a}{-2(x-1)} = \frac{1-a}{2a}$

$\frac{2-x}{x-1} + \frac{a}{x-1} = \frac{1-a}{2a}$ $\qquad$ Moltiplichiamo tutti i termini per il $m.c.m. = 2a\,(x-1)$:

$2a \cdot (2-x) + 2a \cdot a = (x-1) \cdot (1-a)$;

$2a \cdot (2-x) + 2a \cdot a = (x-1) \cdot (1-a)$;

$4a - 2ax + 2a^2 = x - ax - 1 + a$;

$-2ax - x + ax = -2a^2 - 1 + a - 4a$;

$-ax - x = -2a^2 - 3a - 1$;

$ax + x = 2a^2 + 3a + 1$;

$(a+1)x = 2a^2 + 3a + 1$

$(a+1)x = (a+1)(2a+1)$

Discussione

Se $a+1=0$, cioè se $a=-1$ $\Rightarrow$ $0x = 0$ Equazione indeterminata .

Se $a+1 \neq 0$, *cioè se* $a \neq -1$ $\Rightarrow$ $x = \frac{(a+1)(2a+1)}{a+1} = 2a+1$

Tale soluzione è accettabile, se rispetta le condizioni di accettabilità: $C.A.:\ x \neq 1$; $2a+1 \neq 1$; $2a \neq 0$; $a \neq 0$.

Riassumendo

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a = 0$	Equazione che perde di significato	–
$a = -1$	Equazione indeterminata $x \neq 1$	$\forall x \in R$
$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq -1$	Equazione determinata	$x = 2a+1$

2. Risolvi la seguente disequazione letterale :

$k \cdot (x+2) \geq 2 + (x-2) \cdot (k+1) - kx$;

$kx + 2k \geq 2 + kx + x - 2k - 2 - kx$;

$kx + 2k \geq +x - 2k$;

$kx - x \geq -2k - 2k$;

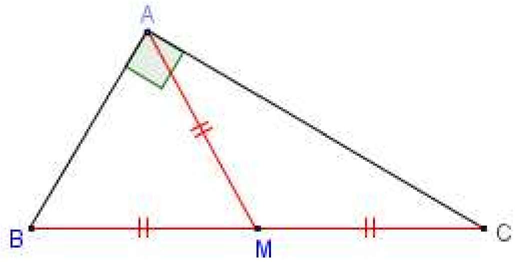
$(k-1)x \geq -4k$;

Se $k-1>0$ cioè $k>1$ $\Rightarrow$ $x \geq \frac{-4k}{k-1}$; $x \geq \frac{4k}{1-k}$

Se $k-1<0$ cioè $k<1$ $\Rightarrow$ $-(k-1)x \leq -(-4k)$; $x \leq \frac{-(-4k)}{-(k-1)}$; $x \leq \frac{4k}{1-k}$

Se $k-1=0$ cioè $k=1$ $\Rightarrow$ $0x \geq -4$; $\forall x \in R$.

In un triangolo rettangolo ABC la misura della mediana relativa all'ipotenusa BC è $2\ cm$ in meno dei $\frac{3}{5}$ dell'ipotenusa stessa e il cateto AB è i $\frac{3}{5}$ dell'ipotenusa. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo.



Poniamo la misura dell'ipotenusa $\overline{BC} = x$ con $x \in R^+$.

Si ricava $\overline{AB} = \frac{3}{5}x$ e $\overline{AM} = \frac{3}{5}x - 2$

Ricordando che la mediana relativa all'ipotenusa è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa, si ha:

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$; $\frac{3}{5}x - 2 = \frac{1}{2}x$; $6x - 20 = 5x$; $x = 20$.

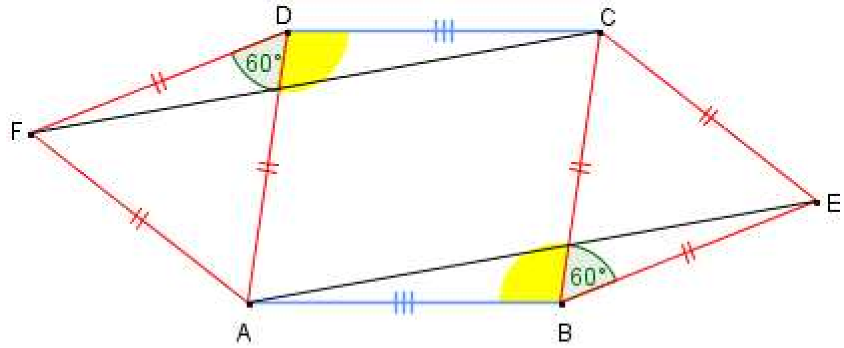
Pertanto $\overline{BC} = 20\ cm$ $\overline{AB} = \frac{3}{5} \cdot 20\ cm = 12\ cm$ $\overline{AM} = 10\ cm$

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{20^2 - 12^2}\ cm = \sqrt{400-144}\ cm = \sqrt{256}\ cm = 16\ cm$.

Il perimetro del triangolo misura $p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (12 + 20 + 16)\ cm = 48\ cm.$

L'area del triangolo vale $S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2}\ cm^2 = 96\ cm^2$.

Sia $ABCD$ un parallelogramma. Costruisci, esternamente al parallelogramma, i triangoli equilateri BCE e ADF.
Dimostra che il quadrilatero $AECF$ è un parallelogramma.



$IPOTESI$		$TESI$
$ABCD$ è un parallelogramma BCE è un triangolo equilatero ADF è un triangolo equilatero	$\Rightarrow$	$AECF$ è un parallelogramma

Dimostrazione

I triangoli $ABE \cong CDF$ per il I C.C.T. Infatti:

$AB \cong DC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$

$BE \cong DF$ perché lati dei due triangoli equilateri BCE e ADF

$\widehat{ABE} \cong \widehat{CDF}$ perché somma di angoli congruenti $\left(\widehat{ABC} \cong \widehat{ADC} \qquad \widehat{CBE} \cong \widehat{ADF} \cong 60°\right)$

Avendo dimostrato che $ABE \cong CDF$ si ha che $AE \cong CF.$

Siccome il quadrilatero $AECF$ ha i lati opposti congruenti, si conclude che $AECF$ è un parallelogramma.