

Prova di Matematica : Sistemi lineari

Durata della prova: 1^h

Alunno: _____ Classe: 2 C

1. Fai un esempio di sistema lineare di due equazioni in due incognite impossibile e rappresentalo nel piano cartesiano.

2. Senza risolvere il sistema, determina quale delle seguenti terne è la soluzione:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases} \quad \square (2; 2; -2) \quad \square (2; 3; 1) \quad \square (1; 1; -1) \quad \square (1; 2; 1)$$

3. Risolvi, con i cinque metodi studiati, il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{12x - 7}{2} - \frac{3(2x + y)}{10} = \frac{7}{10} \\ \frac{2x + y}{3} - \frac{x + y}{2} - \frac{4}{9} = 0 \end{cases}$$

4. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} k(x + y) - (x - y + 5) = k \\ kx + 2ky + k = 15 \end{cases}$$

5. La durata di un volo da Londra a New York, a causa di venti dominanti che nel nostro emisfero spirano mediamente da ovest verso est, è 1 ora in più della durata del volo da New York a Londra. Gli orari di partenza e di arrivo, forniti in ora locale, sono sotto indicati.

Partenza		Arrivo	
Londra	Ore 12	New York	Ore 15
New York	Ore 18	Londra	Ore 8

Qual è la durata del volo da New York a Londra ?

Qual è la differenza di fuso orario fra le due città ?

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	Totale
	Punti	10	5	25	15	15	70

6.

Punti	0 - 2	3 - 7	8 - 12	13 - 17	18 - 22	23 - 27	28 - 32	33 - 37	38 - 42	43 - 47	48 - 52	53 - 57	58 - 62	63 - 67	68 - 70
Voto	3	3 ½	4	4 ½	5	5 ½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	9 ½	10

Soluzione

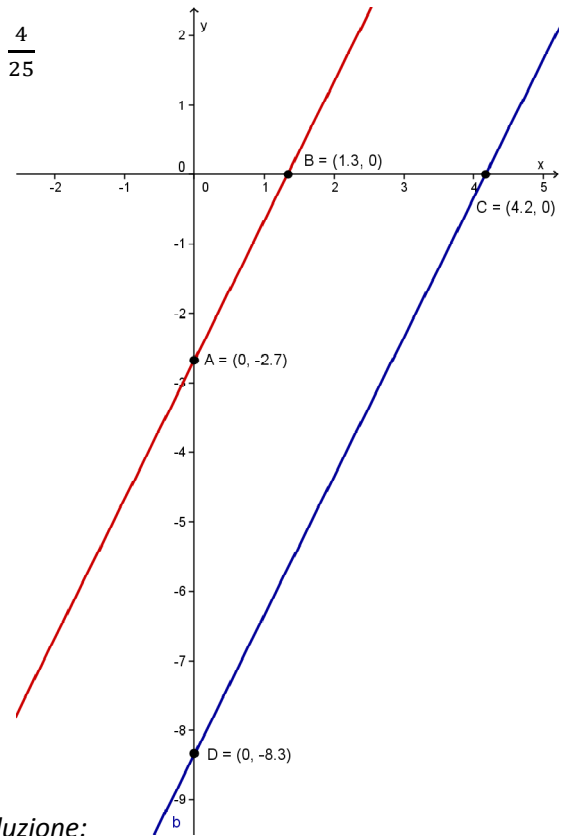
1. Fai un esempio di sistema lineare di due equazioni in due incognite impossibile e rappresentalo nel piano cartesiano.

$$\begin{cases} 6x - 3y = 8 \\ 12x - 6y = 50 \end{cases} \quad \frac{a}{a'} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \frac{b}{b'} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \quad \frac{c}{c'} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Il sistema è impossibile

$$6x - 3y - 8 = 0 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -\frac{8}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} \end{array}$$

$$12x - 6y = 50 \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -\frac{25}{3} \\ \frac{25}{6} & 0 \end{array}$$



2. Senza risolvere il sistema, determina quale delle seguenti terne è la soluzione:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 4x + 2y - 3z = 5 \end{cases} \quad \square (1; 2; 1)$$

3. Risolvi, con i cinque metodi studiati, il seguente sistema di equazioni:

A. Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} \frac{12x - 7}{2} - \frac{3(2x + y)}{10} = \frac{7}{10} \\ \frac{2x + y}{3} - \frac{x + y}{2} - \frac{4}{9} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60x - 35 - 6x - 3y = 7 \\ 12x + 6y - 9x - 9y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54x - 3y = 42 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 18x - 14 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 3(18x - 14) = 8 \end{cases}$$

$$3x - 54x + 42 = 8$$

$$-51x = -34$$

$$x = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$$

$$y = 18 \cdot \frac{2}{3} - 14 = 12 - 14 = -2$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

B. Metodo di riduzione

$$\begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$6 \cdot \begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18x - y = 14 & - \\ 18x - 18y = 48 & = \end{cases}$$

$$17y = -34; \quad y = -2$$

$$3 \cdot \begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 54x - 3y = 42 & - \\ 3x - 3y = 8 & = \end{cases}$$

$$51x = 34;$$

$$x = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

C. Metodo del confronto

$$\begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 18x - 14 \\ 3y = 3x - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - \frac{8}{3} \\ x - \frac{8}{3} = 18x - 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 8 = 54x - 42 \\ - \quad - \end{cases} \quad \begin{cases} -51x = -34 \\ - \quad - \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{34}{51} = \frac{2}{3} \\ x - \frac{8}{3} = 18x - 14 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} = \frac{-6}{3} = -2 \\ x = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$$

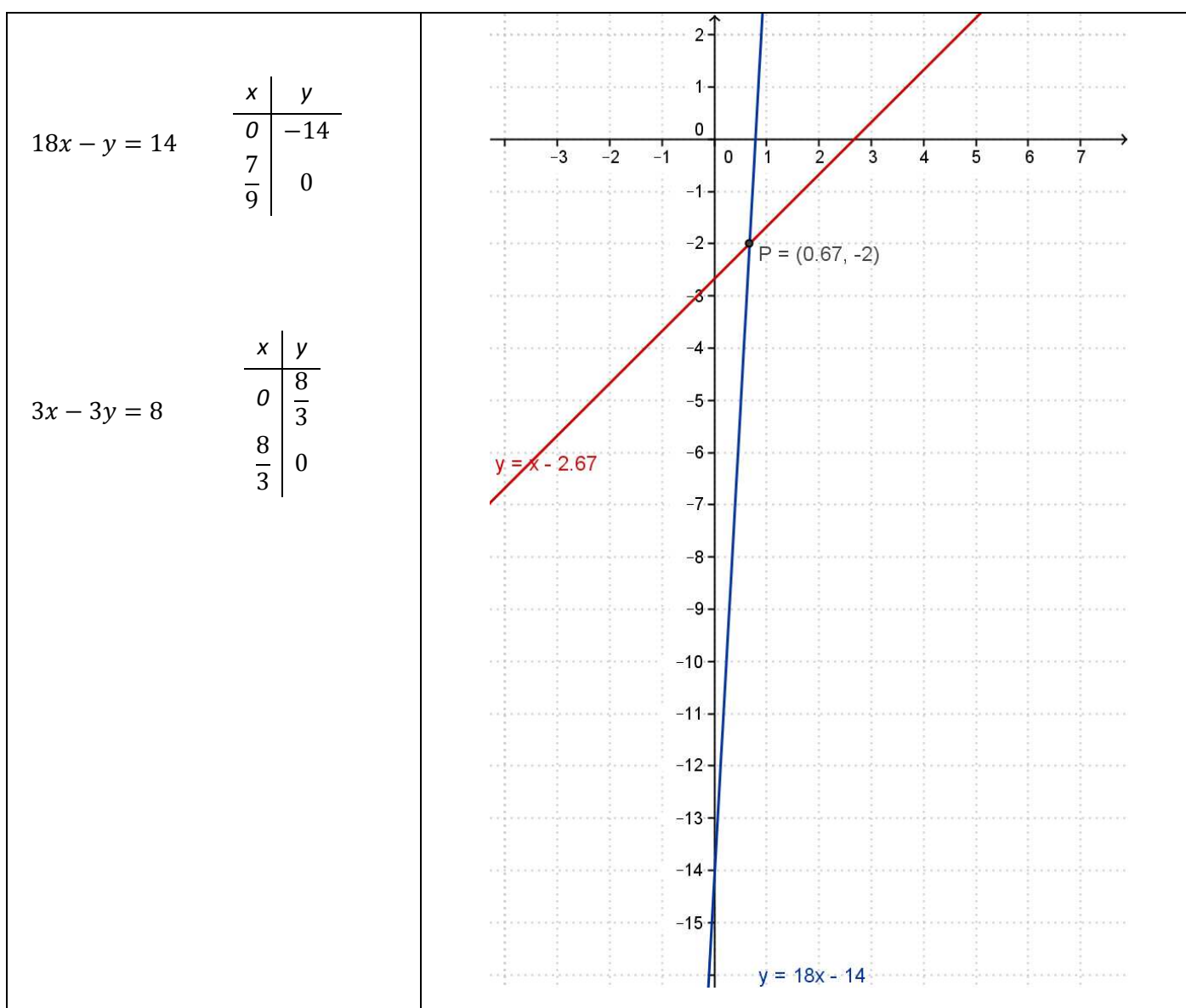
D. Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 18x - y = 14 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases} \quad |D| = \begin{vmatrix} 18 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -54 + 3 = -51$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -42 + 8 = -34 \quad |D_y| = \begin{vmatrix} 18 & 14 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 144 - 42 = 102$$

$$\left(x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-34}{-51} = \frac{2}{3} ; \quad y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{102}{-51} = -2 \right)$$

E. Metodo Grafico



4. Risolvi e discuti il seguente sistema letterale nelle incognite x e y :

$$\begin{cases} k(x+y) - (x-y+5) = k \\ kx + 2ky + k = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx + ky - x + y = k + 5 \\ kx + 2ky = 15 - k \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k-1)x + (k+1)y = k+5 \\ kx + 2ky = 15 - k \end{cases}$$

Il determinante del sistema è $D = \begin{vmatrix} k-1 & k+1 \\ k & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 - 2k - k^2 - k = k^2 - 3k = k \cdot (k-3)$.

Il determinante $D_x = \begin{vmatrix} k+5 & k+1 \\ 15-k & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 + 10k - 15k - 15 + k^2 + k = 3k^2 - 4k - 15 = (k-3)(3k+5)$

Il determinante $D_y = \begin{vmatrix} k-1 & k+5 \\ k & 15-k \end{vmatrix} = 15k - k^2 - 15 + k - k^2 - 5k = -2k^2 + 11k - 15 =$
 $= -(2k^2 - 11k + 15) = -(k-3)(2k-5)$.

Discussione:

Se $D = 0$ cioè se $k \cdot (k-3) = 0$

$$\begin{cases} k = 0 & \Rightarrow & \begin{cases} 0x = -15 \\ 0y = -15 \end{cases} & S. \text{impossibile} \\ k = 3 & \Rightarrow & \begin{cases} 0x = 0 \\ 0y = 0 \end{cases} & S. \text{indeterminato} \end{cases}$$

Se $D \neq 0$ cioè $k \neq 0 \wedge k \neq 3$ il sistema è determinato, e la soluzione è :

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{(k-3)(3k+5)}{k \cdot (k-3)} = \frac{3k+5}{k} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(k-3)(2k-5)}{k \cdot (k-3)} = \frac{5-2k}{k} \end{cases} \quad \text{Riassumendo si ha:}$$

Parametro	Tipo	Soluzione
$k = 0$	Sistema impossibile	\emptyset
$k = 3$	Sistema indeterminato	∞
$k \neq 0 \wedge k \neq 3$	Sistema determinato	$\left(x = \frac{3k+5}{k} ; y = \frac{5-2k}{k} \right)$

5. La durata di un volo da Londra a New York, a causa di venti dominanti che nel nostro emisfero spirano mediamente da ovest verso est, è 1 ora in più della durata del volo da New York a Londra. Gli orari di partenza e di arrivo, forniti in ora locale, sono sotto indicati.

Partenza		Arrivo	
Londra	Ore 12	New York	Ore 15
New York	Ore 18	Londra	Ore 8

Qual è la durata del volo da New York a Londra? Qual è la differenza di fuso orario fra le due città?

Soluzione

Indichiamo:

la durata volo New York \rightarrow Londra = x la differenza di fuso orario Londra – New York = y

Con le condizioni di accettabilità : $x > 0 \quad \wedge \quad -12 < y < 12$.

Dalla tabella della traccia si ha:

Partenza		Arrivo		Tempo	Fuso orario
Londra	Ore 12	New York	Ore 15	3 ore	+ y
New York	Ore 18	Londra	Ore 8	14 ore	- y

Pertanto si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \text{Durata (L} \rightarrow \text{NY)} = 3 + \text{Fuso orario} \\ \text{Durata (NY} \rightarrow \text{L)} = 14 - \text{Fuso orario} \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 = 3 + y \\ x = 14 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + y \\ x = 14 - y \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + y = 14 - y \\ 2y = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$$

Pertanto la durata del volo da New York a Londra è di 8 ore. Mentre la differenza di fuso orario è di 6 ore.

Ciò vuol dire che:

Partenza		Arrivo		Durata
Londra	Ore 12 = ore 6 di New York	New York	Ore 15	9 ore
New York	Ore 18 = ore 24 di Londra	Londra	Ore 8	8 ore