14.01.2014
prof. Mimmo Corrado

# Prova di Matematica : Radicali

Durata della prova: $1^h$

Alunno: ________________________________________ Classe: LS (s.a.) 2 C

1.
$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}$ V F
$\sqrt{x^2+y^2} = |x| + |y|$ V F
$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$ V F
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ V F
$\sqrt[2]{x^2-2x+1} = |x-1|$ V F
$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = -2$ V F
$\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3} = 6$ V F
$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-2} = 0$ V F
$\sqrt[7]{x^{17}y^8} = x^2y\sqrt[7]{x^3y}$ V F
$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2}$ V F

2. Scrivi i primi 5 termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero irrazionale $3\sqrt{2}-1$ .
3. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $\sqrt{10}$ .
4. Dimostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 5.
5. Semplifica la seguenti espressioni, supponendo positivi i fattori letterali che compongono i radicali:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{12} + \left(\sqrt[4]{3}-1\right)\left(\sqrt[4]{3}+1\right) + \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \left(\sqrt[4]{5}+3\right)\left(\sqrt[4]{5}-3\right)$$

$$\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\left[\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a^2+ab}}:\sqrt{\frac{a-b}{a^2}}\right]:\sqrt[6]{\frac{a^2}{a+b}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt[7]{3}}\right)^7 + 2\cdot\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}$$

6. Risolvi la seguente equazione: $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{1-x}{1-\sqrt{2}} = 1$

7. Traccia il grafico della funzione: $y = \sqrt{9x^2-6x+1} + 3x$

| Valutazione | Esercizio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Totale |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punti | 10 | 5 | 5 | 10 | 24 | 8 | 8 | 70 |

1.

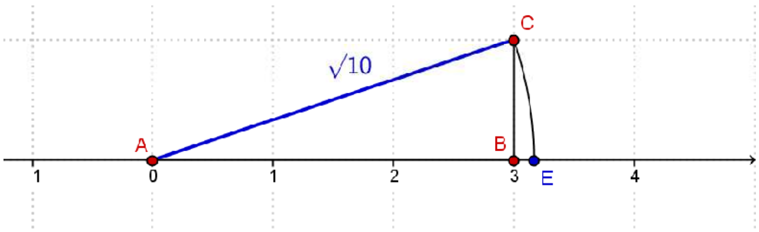
| Punti | 0 - 2 | 3 - 7 | 8 - 12 | 13 - 17 | 18 - 22 | 23 - 27 | 28 - 32 | 33 - 37 | 38 - 42 | 43 - 47 | 48 - 52 | 53 - 57 | 58 - 62 | 63 - 67 | 68 - 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Voto | 3 | 3 ½ | 4 | 4 ½ | 5 | 5½ | 6 | 6 ½ | 7 | 7 ½ | 8 | 8 ½ | 9 | 9½ | 10 |

1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27}$ | V | $\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2} = -2$ | F |
| $\sqrt{x^2+y^2} = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ | F | $\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3} = 6$ | V |
| $\sqrt{3}+\sqrt{2} = \sqrt{5}$ | F | $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{-2} = 0$ | V |
| $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ | V | $\sqrt[7]{x^{17}y^8} = x^2y\,\sqrt[7]{x^3y}$ | V |
| $\sqrt[2]{x^2-2x+1} = \lvert x-1\rvert$ | V | $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2}$ | F |

2. Scrivi i primi 5 termini delle classi contigue di numeri razionali che hanno come elemento di separazione il numero irrazionale $3\sqrt{2}-1$ .
   <u>*Soluzione*</u>
   $3\sqrt{2}-1 \;=\; 3{,}2426406871\,\ldots$ .
   $D = \{3\,;\;\; 3{,}2\,;\;\; 3{,}24\,;\;\; 3{,}242\,;\;\; 3{,}2426\,\}$ $\qquad$ $E = \{4\,;\;\; 3{,}3\,;\;\; 3{,}25\,;\;\; 3{,}243\,;\;\; 3{,}2427\,\}$

3. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $\sqrt{10}$ .




4. Dimostra che non esiste un numero razionale il cui quadrato sia 5.
   <u>*Dimostrazione*</u>
   *Supponiamo per assurdo che esista un numero razionale* $\dfrac{a}{b}$ *tale che* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 5$ *con* $a$ *e* $b$ *numeri primi tra loro.*

   *Ma* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{a^2}{b^2} = 5;$ $\qquad$ *(*)* $a^2 = 5\cdot b^2 \;\Rightarrow\;$ $a^2$ *è multiplo di 5* $\;\Rightarrow\;$ $a$ *è multiplo di 5* .

   *Se* $a$ *è multiplo di 5 si può scrivere:* $a = 5\cdot k$ .

   *Sostituendo tale espressione nella relazione (*) si ottiene:*

   $(5k)^2 = 5\cdot b^2;\;\; 25k^2 = 5\cdot b^2;\;\; 5k^2 = b^2 \;\Rightarrow\;$ $b^2$ *è multiplo di 5* $\;\Rightarrow\;$ $b$ *è multiplo di 5 , cioè:* $b = 5\cdot h$ .

   *Pertanto si ha:* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{5k}{5h}$ *e ciò è un assurdo, perché per ipotesi* $a$ *e* $b$ *erano primi tra loro, invece in questa eguaglianza sono entrambi divisibili per 5.*

5. Semplifica la seguenti espressioni:

$$\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{12} + \left(\sqrt[4]{3}-1\right)\left(\sqrt[4]{3}+1\right) + \sqrt[6]{27} \quad =$$
$$= 1 + 3 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} =$$
$$= 3 + 6\sqrt{3}\ .$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}} \;-\; \left(\sqrt[4]{5}+3\right)\left(\sqrt[4]{5}-3\right) \;=\; \sqrt{5}+1-\left(\sqrt{5}-9\right) = 10$$

avendo calcolato da parte $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{6+\sqrt{2^2\cdot 5}} = \sqrt{6+\sqrt{20}} =$ $\qquad$ $a^2 - b = 6^2 - 20 = 16$

$$= \sqrt{\frac{6+\sqrt{16}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{16}}{2}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} + \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{5}+1$$

$$\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\left[\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a^2+ab}}:\sqrt{\frac{a-b}{a^2}}\right]:\sqrt[6]{\frac{a^2}{a+b}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\left[\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a(a+b)}}:\sqrt{\frac{a-b}{a^2}}\right]:\sqrt[6]{\frac{a^2}{a+b}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\left[\sqrt[6]{\frac{(a-b)^4}{a^2(a+b)^2}}:\sqrt[6]{\frac{(a-b)^3}{a^6}}\right]:\sqrt[6]{\frac{a^2}{a+b}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a-b)^4}{a^2(a+b)^2}\cdot\frac{a^6}{(a-b)^3}}:\sqrt[6]{\frac{a^2}{a+b}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(a-b)\cdot a^4}{(a+b)^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{a+b}{a^3(a-b)}\cdot\frac{(a-b)\cdot a^4}{(a+b)^2}\cdot\frac{a+b}{a^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{1}{a}}=\frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a}}\cdot\frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[6]{a^5}}=\frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$$

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt[7]{3}}\right)^7+2\cdot\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}=$$

Occorre fare attenzione a: $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}=\left|1-\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{3}\right)$ perchè $1-\sqrt{3}<0$

$$\frac{\left(\sqrt{\sqrt[7]{3}}\right)^7+2\cdot\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{3}\right)^4}}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}+2\cdot\left[-\left(1-\sqrt{3}\right)\right]}{\left(4+3-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}=\frac{3\sqrt{3}-2}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{-\left(2-3\sqrt{3}\right)}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\cdot\left(2-3\sqrt{3}\right)}=\frac{-1}{7-4\sqrt{3}}=\frac{-1}{7-4\sqrt{3}}\cdot\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}=\frac{-7-4\sqrt{3}}{49-48}=\frac{-7-4\sqrt{3}}{1}=-7-4\sqrt{3}$$

7. Risolvi la seguente equazione: $\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{2}}=1$

$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{2}}=1$ ; $\quad\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=1$ ; $\quad\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{1+\sqrt{2}-x-\sqrt{2}x}{1-2}=1$ ;

$\frac{\sqrt{2}x}{2}+\frac{1+\sqrt{2}-x-\sqrt{2}x}{-1}=1$ ; $\quad\sqrt{2}x-2-2\sqrt{2}+2x+2\sqrt{2}x=2$ ;

$\sqrt{2}x+2x+2\sqrt{2}x=4+2\sqrt{2}$ ; $\quad\left(\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}\right)x=4+2\sqrt{2}$ ;

$\left(3\sqrt{2}+2\right)x=4+2\sqrt{2}$ ;

$$x=\frac{4+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2}=\frac{4+2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+2}\cdot\frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-2}=\frac{12\sqrt{2}-8+6\cdot2-4\sqrt{2}}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-2^2}=\frac{8\sqrt{2}+4}{18-4}=\frac{4\left(2\sqrt{2}+1\right)}{14}=\frac{2\left(2\sqrt{2}+1\right)}{7}$$

8. Traccia il grafico della seguente funzione: $y = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + 3x$

$$y = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + 3x = \sqrt{(3x-1)^2} + 3x = |3x - 1| + 3x = \begin{cases} +(3x-1) + 3x & se \;\; 3x - 1 \geq 0 \\ -(3x-1) + 3x & se \;\; 3x - 1 < 0 \end{cases}$$ cioè:

$$y = \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + 3x = \begin{cases} 6x - 1 & se \;\; x \geq \frac{1}{3} \\ 1 & se \;\; x < \frac{1}{3} \end{cases}$$