Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2013-2014

Prova di Matematica : Equazioni di II grado

06.03.2014

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 B

prof. Mimmo Corrado
Tempo 75 minuti

A. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$x^2 = x$	$9y^2 + 12 = 0$
$28b - 45 = 4b^2$	$x^2 + 2\left(x - \sqrt{2} - 1\right) = 0$
$x - (2x-1)^2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3-x}{2} - (3x-1)(x-2)$	$\dfrac{x+7}{3x^2-7x+2} + 2 = \dfrac{3-x}{x-2}$

B. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $4x^2 - 2kx - 4x + 2k = 0$

a. *ha due soluzioni reali e opposte*
b. *la somma dei reciproci delle radici reali sia uguale a 6*
c. *la somma dei quadrati delle radici reali sia uguale a 10*
d. *la somma dei reciproci dei quadrati delle radici reali sia uguale a 2*
e. *la somma dei cubi delle radici reali sia uguale a 2*

C. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale: $x^2 - \dfrac{2}{a}x + 3x + 2 - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 0$

D. Un trapezio isoscele ha le diagonali perpendicolari ai lati obliqui. Sapendo che la base minore misura 2 cm e una diagonale 6 cm , determina la misura della base maggiore.

Valutazione	Esercizio	A	B	C	D	Totale
	Punti	3+3+3+3+4+4	3+3+3+4+4	16	17	70

Punti	*0 - 2*	*3 - 7*	*8 - 12*	*13 - 17*	*18 - 22*	*23 - 27*	*28 - 32*	*33 - 37*	*38 - 42*	*43 - 47*	*48 - 52*	*53 - 57*	*58 - 62*	*63 - 67*	*68 - 70*
Voto	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*9½*	*10*

Soluzione

A. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$x^2 = x\,;\quad x^2 - x = 0\,;\quad x\cdot(x-1) = 0\,;\quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$

$9y^2 + 12 = 0\,;\quad 3y^2 + 4 = 0\,;\quad 3y^2 = -4\,;\quad y^2 = -\frac{4}{3}\,;\quad y = \mp\sqrt{-\frac{4}{3}} = \mp\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}i = \mp\frac{2}{3}\sqrt{3}\,i$

$28b - 45 = 4b^2\,;\quad 4b^2 - 28b + 45 = 0\,;\quad \frac{\Delta}{4} = 196 - 180 = 16\,;\quad x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{4} = \begin{matrix} x_1 = \frac{14-4}{4} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{14+4}{4} = \frac{9}{2} \end{matrix}$

$x^2 + 2\left(x - \sqrt{2} - 1\right) = 0\,;\quad x^2 + 2x - 2\sqrt{2} - 2 = 0\,;\quad \frac{\Delta}{4} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2\,;$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \begin{matrix} x_1 = -1 - \left(1+\sqrt{2}\right) = -2 - \sqrt{2} \\ x_2 = -1 + \left(1+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \end{matrix}$

$x - (2x-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3-x}{2} - (3x-1)(x-2)\,;\quad x - 4x^2 - 1 + 4x + \frac{1}{2} = \frac{3-x}{2} - 3x^2 + 6x + x - 2\,;$

$2x - 8x^2 - 2 + 8x + 1 = 3 - x - 6x^2 + 12x + 2x - 4;\quad 2x^2 + 3x = 0\,;\quad x\cdot(2x+3) = 0\quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{matrix}$

$\frac{x+7}{3x^2 - 7x + 2} + 2 = \frac{3-x}{x-2}\,;\quad \frac{x+7}{(x-2)(3x-1)} + 2 = \frac{3-x}{x-2}\,;\quad C.E.:\ \ x \neq 2\ \ \wedge\ \ x \neq \frac{1}{3}$

$x + 7 + 2\cdot(x-2)(3x-1) - (3-x)(3x-1) = 0\,;\quad x + 7 + 2(3x^2 - x - 6x + 2) - (9x - 3 - 3x^2 + x) = 0$

$x + 7 + 6x^2 - 2x - 12x + 4 - 9x + 3 + 3x^2 - x = 0\,;\quad 9x^2 - 23x + 14 = 0\,;\quad \Delta = 529 - 504 = 25\,;$

$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{25}}{18} = \begin{matrix} x_1 = \frac{23-5}{18} = \frac{18}{18} = 1\ \ Acc \\ x_2 = \frac{23+5}{18} = \frac{28}{18} = \frac{14}{9}\ \ Acc. \end{matrix}$

B. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $4x^2 - 2kx - 4x + 2k = 0$

a. *ha due soluzioni reali e opposte*
b. *la somma dei reciproci delle radici reali sia uguale a 6*
c. *la somma dei quadrati delle radici reali sia uguale a 10*
d. *la somma dei reciproci dei quadrati delle radici reali sia uguale a 2*
e. *la somma dei cubi delle radici reali sia uguale a 2*

$4x^2 - 2kx - 4x + 2k = 0\,;\quad 2x^2 - kx - 2x + k = 0\,;$

$x^2 - (k+2)x + k = 0\,;$

Le soluzioni sono reali se $\Delta \geq 0$;

$(k+2)^2 - 8k \geq 0\,;\quad k^2 + 4 + 4k - 8k \geq 0\,;\quad k^2 + 4 - 4k \geq 0\,;\quad (k-2)^2 \geq 0\quad \forall k \in R$

L'equazione ha solo soluzioni reali.

a. L'equazione ha soluzioni opposte se $k + 2 = 0$ cioè se $k = -2$ Accettabile.

b. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=6\,;$ $\quad \frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2}=6\,;$ $\quad -\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=6\,;$ $\quad -\frac{b}{c}=6\,;$ $\quad \frac{k+2}{k}=6\,;$ $\quad k+2=6k$ con $k\neq 0$

$5k=2\,;$ $\quad k=\frac{2}{5}$ *Accettabile*

c. $x_1{}^2+x_2{}^2=10\,;$ $\quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10\,;$ $\quad \frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}=10\,;$

$\left(\frac{k+2}{2}\right)^2-2\frac{k}{2}=10\,;$ $\quad \frac{k^2+4+4k}{4}-k=10\,;$ $\quad k^2+4+4k-4k=40\,;$

$k^2=36\,;$ $\quad k=\mp 6$ *Accettabili*

d. $\frac{1}{x_1{}^2}+\frac{1}{x_2{}^2}=2\,;$ $\quad \frac{x_2{}^2+x_1{}^2}{x_1{}^2\cdot x_2{}^2}=2\,;$ $\quad \frac{\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=2\,;$

$\frac{\left(\frac{k+2}{2}\right)^2-2\frac{k}{2}}{\frac{k^2}{4}}=2\,;$ $\quad \frac{\frac{k^2+4+4k}{4}-k}{\frac{k^2}{4}}=2\,;$ $\quad \frac{\frac{k^2+4+4k-4k}{4}}{\frac{k^2}{4}}=2\,;$

$\frac{k^2+4}{4}\cdot\frac{4}{k^2}=2\,;$ $\quad \frac{k^2+4}{k^2}=2\,;$ $\quad k^2+4=2k^2\,;$ $\quad k^2=4\,;$ $\quad k=\mp 2$ *Accettabili*

e. $x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)^3-3x_1{}^2x_2-3x_1x_2{}^2=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=$

$=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$

$\frac{3abc-b^3}{a^3}=2\,;$ $\quad \frac{3\cdot 2\cdot(-k-2)\cdot k-(-k-2)^3}{2^3}=2\,;$ $\quad \frac{-6k^2-12k+k^3+8+6k^2+12k}{8}=2\,;$

$k^3+8=16\,;$ $\quad k^3=8\,;$ $\quad k=2$ *Accettabile .*

C. Risolvi e discuti la seguente equazione letterale: D. $x^2-\frac{2}{a}x+3x+2-\frac{3}{a}+\frac{1}{a^2}=0$

Soluzione

Moltiplicando per $a^2\neq 0$ si ottiene: $\quad a^2x^2-2ax+3a^2x+2a^2-3a+1=0 \quad \Rightarrow$

$\boxed{a^2x^2-(2a-3a^2)x+2a^2-3a+1=0}$ $\quad \boxed{A=a^2}\ \boxed{B=-(2a-3a^2)}\ \boxed{C=2a^2-3a+1}$

$A=0$ *(Equazione di I grado)* $\quad\Rightarrow\quad a^2=0\,;\quad a=0$ *non accettabile*

$B=0$ *(Equazione Pura)* $\quad\Rightarrow\quad -(2a-3a^2)=0;\quad 2a-3a^2=0\,;\quad a\cdot(2-3a)=0$ $\quad \begin{matrix} a=0 & \textit{Non Acc} \\ a=\frac{2}{3} & \textit{Acc}\end{matrix}$

$\Rightarrow\quad \frac{4}{9}x^2+2\cdot\frac{4}{9}-3\cdot\frac{2}{3}+1=0\,;$ $\quad \frac{4}{9}x^2+\frac{8}{9}-2+1=0\,;$ $\quad \frac{4}{9}x^2-\frac{1}{9}=0\,;$

$4x^2-1=0\,;$ $\quad x^2=\frac{1}{4}\,;$ $\quad x_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{1}{4}}=\mp\frac{1}{2}$

$C=0$ *(Equazione Spuria)* $\quad\Rightarrow\quad 2a^2-3a+1=0\,;\quad \Delta=9-8=1\quad x_{1,2}=\frac{3\mp 1}{4}=$ $\begin{matrix} a_1=\frac{1}{2} & \textit{Acc} \\ a_2=1 & \textit{Acc}\end{matrix}$

$a_1=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}x^2-\left[2\cdot\frac{1}{2}-3\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]x=0\,;$ $\quad \frac{1}{4}x^2-\left[1-\frac{3}{4}\right]x=0\,;$ $\quad \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x=0\,;$

$x^2-x=0\,;$ $\quad \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=1\end{matrix}$

$a_1=1\quad\Rightarrow\quad x^2-[2\cdot 1-3\cdot 1^2]x=0\,;$ $\quad x^2+x=0\,;$ $\quad x^2+x=0\,;$ $\quad \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=-1\end{matrix}$

$\Delta=[-(2a-3a^2)]^2-4a^2\cdot(2a^2-3a+1)\ =\ 4a^2+9a^4-12a^3-8a^4+12a^3-4a^2\ =\ a^4$

$\Delta=0\quad a^4=0\,;\quad a=0$ Non accettabile.

$\Delta < 0 \qquad a^4 < 0$ per nessun valore di a.

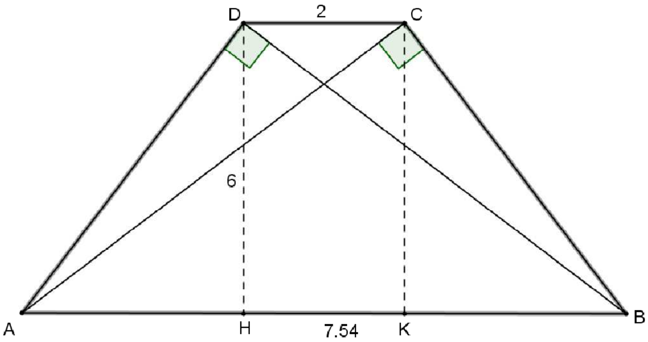
$\Delta > 0 \qquad a^4 > 0\,; \qquad a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{2a - 3a^2 \mp \sqrt{a^4}}{2a^2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2a - 3a^2 - a^2}{2a^2} = \dfrac{2a - 4a^2}{2a^2} = \dfrac{2a(1-2a)}{2a^2} = \dfrac{1-2a}{a} \\ x_2 = \dfrac{2a - 3a^2 + a^2}{2a^2} = \dfrac{2a - 2a^2}{2a^2} = \dfrac{2a(1-a)}{2a^2} = \dfrac{1-a}{a} \end{cases}$$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a = 0$	*Perde di significato*	$-$
$\nexists\, a \in R$	*Equazione di I° grado*	$-$
$a = \frac{2}{3}$	*Equazione Pura*	$x_{1,2} = \mp\frac{1}{2}$
$a_1 = \frac{1}{2}$	*Equazione Spuria*	$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 1$
$a_1 = 1$		$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = -1$
$\nexists\, a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta = 0$	$-$
$\nexists\, a \in R$	*Equazione Completa con* $\Delta < 0$	$-$
$a \neq 0 \quad \wedge \quad a \neq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad a \neq \frac{2}{3}$	*Equazione Completa con* $\Delta > 0$	$x_1 = \frac{1-2a}{a} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{1-a}{a}$

E. Un trapezio isoscele ha le diagonali perpendicolari ai lati obliqui. Sapendo che la base minore misura $2\ cm$ e una diagonale $6\ cm$, determina la misura della base maggiore.



__Soluzione__

Si pone $\overline{AH} = x$ con $x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AK} = x + 2$

$\overline{AB} = 2x + 2$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACK si ha:

$\overline{CK}^2 = 6^2 - (x+2)^2 = 32 - x^2 - 4x$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$\overline{BC}^2 = (2x+2)^2 - 6^2 = 4x^2 + 4 + 8x - 36 = 4x^2 + 8x - 32$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABK si ha:

$\overline{BC}^2 = \overline{CK}^2 + \overline{BK}^2\,; \qquad 4x^2 + 8x - 32 = 32 - x^2 - 4x + x^2\,; \qquad 4x^2 + 12x - 64 = 0$

$x^2 + 3x - 16 = 0 \qquad \Delta = 9 + 64 = 73$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{73}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3 - \sqrt{73}}{2} & non\ accettabile \\ x_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{73}}{2} & accettabile \end{cases}$$

Pertanto la base maggiore misura $\overline{AB} = \left(2\frac{-3+\sqrt{73}}{2} + 2\right)\ cm = \left(-3 + \sqrt{73} + 2\right)\ cm = \left(\sqrt{73} - 1\right)\ cm.$