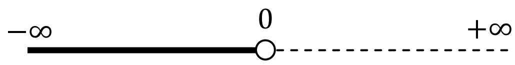
Esercizi per la prova scritta
Disequazioni + Geometria 1

1. La disequazione $-x > x$ ha per soluzione:

<u>*Soluzione*</u>

$-x > x$; $\quad -x - x > 0$; $\quad -2x > 0$; $\quad 2x < 0$; $\quad x < 0$

$]-\infty, 0[$



2. La disequazione $(x-1)^2 + 9x(x-1) > x^2 - 4x + 4 - (1+3x)(1-3x)$ ha per soluzione:

<u>*Soluzione*</u>

$(x-1)^2 + 9x(x-1) > x^2 - 4x + 4 - (1+3x)(1-3x)$;

$x^2 + 1 - 2x + 9x^2 - 9x > x^2 - 4x + 4 - (1 - 9x^2)$;

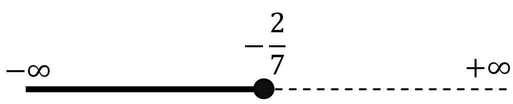
$+1 - 2x - 9x > -4x + 4 - 1$;

$-2x - 9x + 4x > +4 - 1 - 1$;

$-7x > +2$;

$7x < -2$;

$x < -\dfrac{2}{7}$.



$\left]-\infty, -\dfrac{2}{7}\right[$

3. Qual è la soluzione della disequazione:

$$\frac{x-2}{4} - \frac{x-1}{2} \geq \frac{3x+1}{3} - 2\left(x + \frac{1}{6}\right)$$

<u>*Soluzione*</u>

$\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{x-1}{2} \geq \dfrac{3x+1}{3} - 2x - \dfrac{1}{3}$;

$12 \cdot \dfrac{x-2}{4} - 12 \cdot \dfrac{x-1}{2} \geq 12 \cdot \dfrac{3x+1}{3} - 12 \cdot 2x - 12 \cdot \dfrac{1}{3}$;

$3(x-2) - 6(x-1) \geq 4(3x+1) - 24x - 4$;

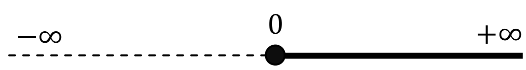
$3x - \cancel{6} - 6x + \cancel{6} \geq 12x + \cancel{4} - 24x - \cancel{4}$;

$3x - 6x - 12x + 24x \geq 0$;

$9x \geq 0$;

$x \geq 0$;

$[0, +\infty[$

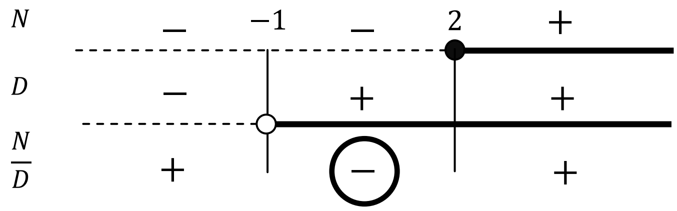


4.

$$\frac{x-2}{x+1} \leq 0$$

$x-2 \geq 0 \qquad x \geq +2$

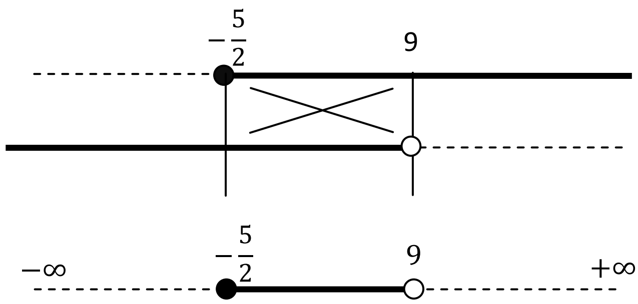
$x+1 > 0 \qquad x > -1$



5. Risolvi il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} -4x-2 \leq -2x+3 \\ \frac{2}{3}x+9 > x+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x+2x \leq 3+2 \\ 2x+27 > 3x+18 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x \leq 5 \\ 2x-3x > 18-27 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x \geq -5 \\ -x > -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x < 9 \end{cases}$$



$$-\frac{5}{2} \leq x < 9 \qquad \left[-\frac{5}{2}, 9\right[$$

6. Risolvi il seguente sistema di disequazioni :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x^3} \geq 0 \\ x^4-4x^2 < 0 \\ 2x^3 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -1 \ \vee \ x > 0 \\ -2 < x < 0 \ \vee \ 0 < x < 2 \\ x > 0 \end{cases} \qquad [0 < x < 2]$$

1. In una fabbrica di giocattoli, si producono pupazzi che vengono rivenduti a € 7,00 ciascuno. Sapendo che i costi fissi mensili (affitto, luce, acqua, stipendi, ecc.) ammontano a € 2100,00 e che il costo del materiale per ogni pupazzo è di €3,50, determina quanti pupazzi devono essere prodotti mensilmente affinché il bilancio non vada in perdita. Se la fabbrica riuscisse a produrre soltanto 500 pupazzi al mese, quanto dovrebbe essere il prezzo di rivendita di un pupazzo affinché il bilancio non vada in perdita.

   (Risolvi il problema sia algebricamente sia graficamente)

Soluzione

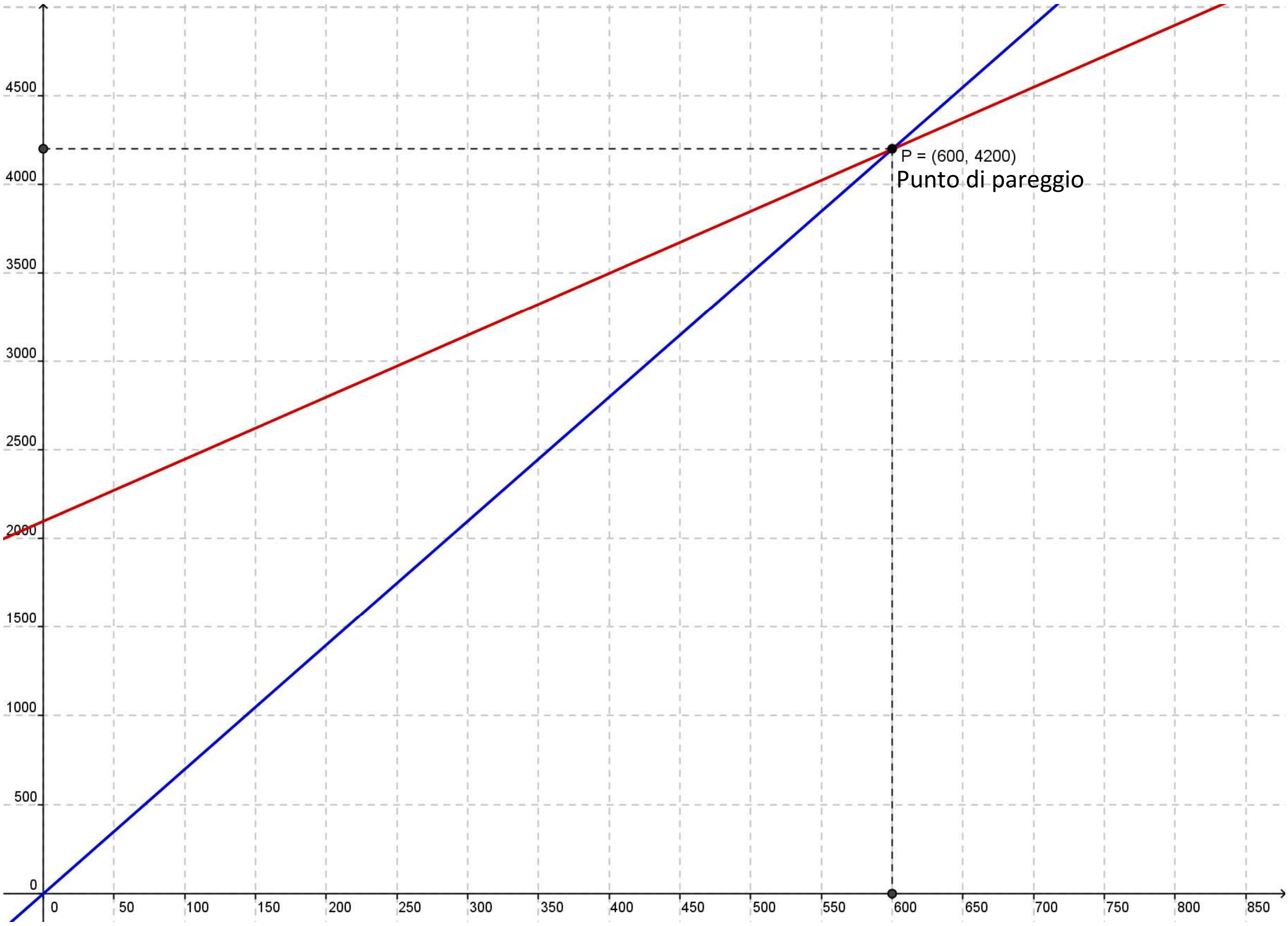
Ponendo:

$numero\ dei\ pupazzi = x$ *si ha:*

$Ricavo \geq Costo$

$7x \geq 2100 + 3{,}5x$; $14x \geq 4200 + 7x$; $14x - 7x \geq 4200$; $7x \geq 4200$ $x \geq 600$.

Pertanto, affinché il bilancio non vada in perdita, la fabbrica deve produrre almeno 600 pupazzi al mese.



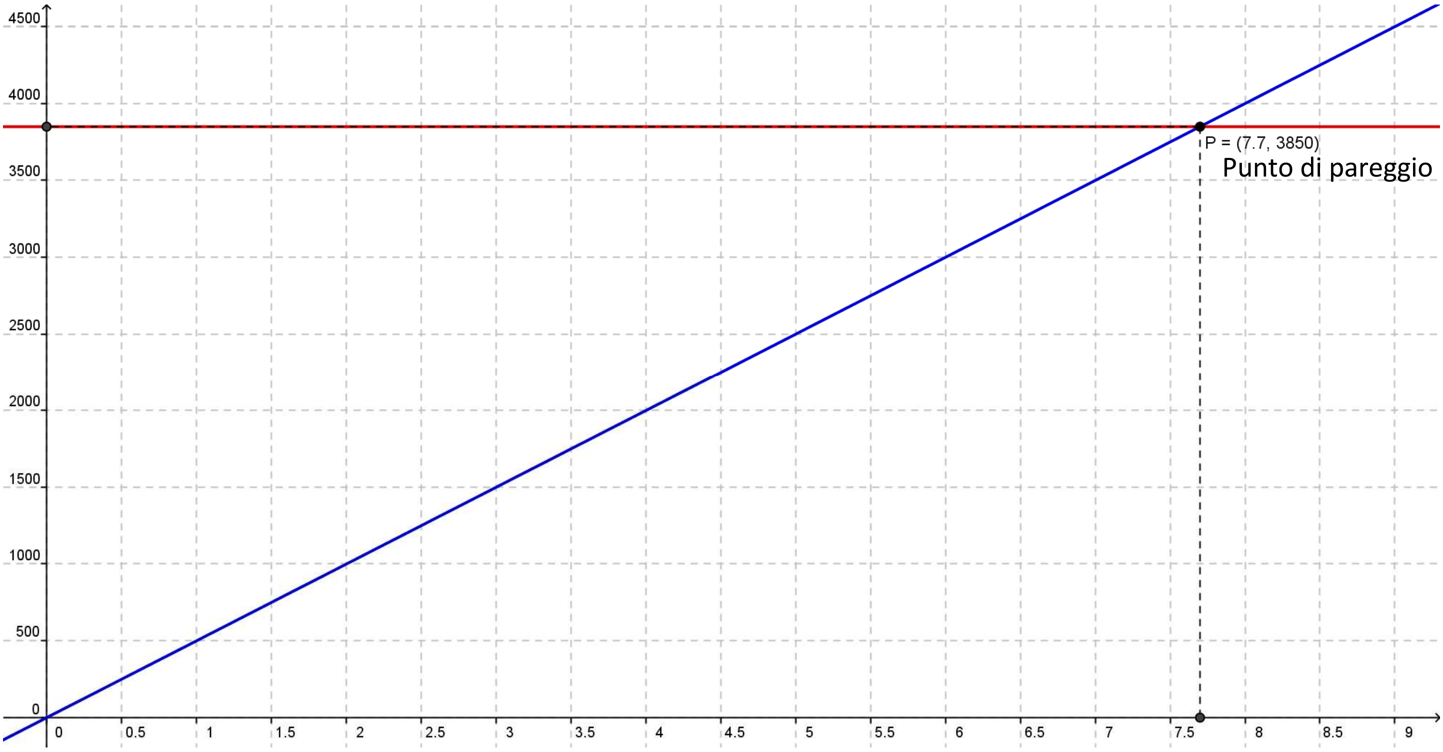
Ponendo:

$Prezzo\ di\ un\ pupazzo = z$ *si ha:*

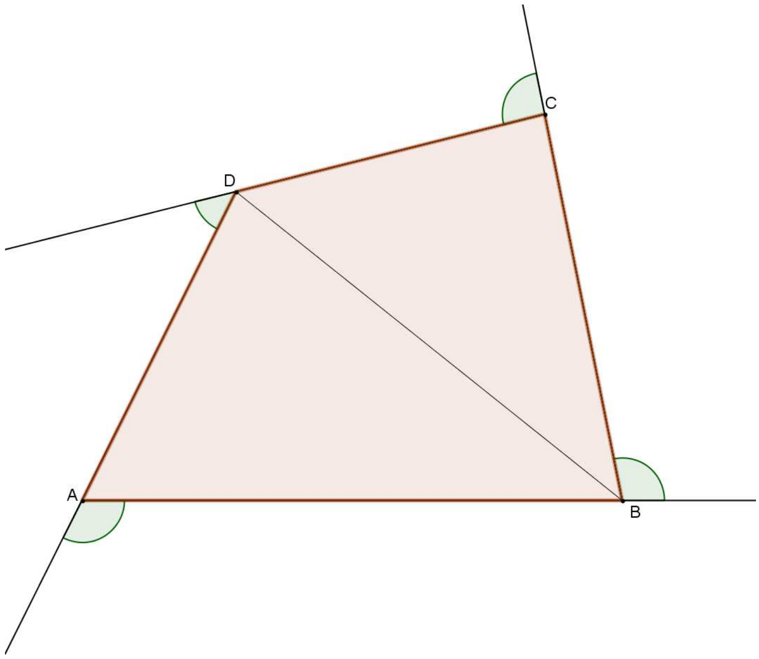
$Ricavo \geq Costo$

$500z \geq 2100 + 3{,}5 \cdot 500$; $500z \geq 2100 + 1750$; $500z \geq 3850$; $z \geq 7{,}7$

Pertanto, se la fabbrica riuscisse a produrre soltanto 500 pupazzi al mese, affinché il bilancio non vada in perdita, il prezzo di rivendita di un pupazzo dovrebbe essere almeno di €7,70 .



1. Dimostra che la somma degli angoli esterni di un quadrilatero è congruente a un angolo giro.



Dimostrazione

La diagonale del quadrilatero divide il quadrilatero in due triangoli.

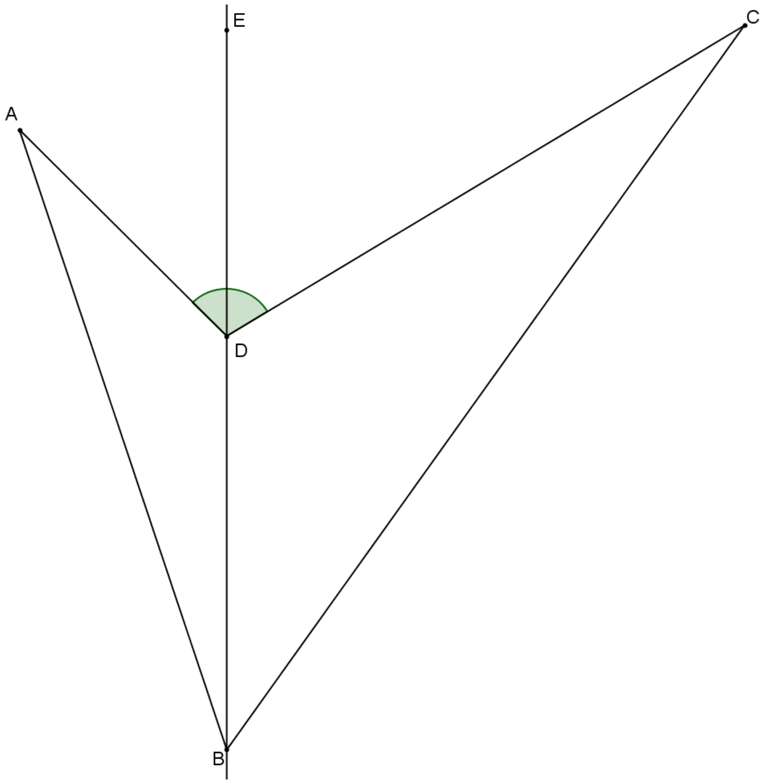
Essendo la somma degli angoli interni di un triangolo congruente a un angolo piatto, si ha che la somma degli angoli interni del quadrilatero è congruente a 2 angoli piatti.

Inoltre, come si evince dal grafico, la somma di un qualsiasi angolo esterno con l'angolo interno ad esso adiacente è congruente a un angolo piatto.

Pertanto la somma di tutti gli angoli interni e di tutti gli angoli esterni del quadrilatero è pari a 4 angoli piatti.

Si conclude perciò, che la somma degli angoli esterni di un quadrilatero è congruente a 2 angoli piatti, cioè a un angolo giro.

2. Considera un quadrilatero concavo ABCD avente l'angolo $\widehat{D}$ concavo. Dimostra che l'angolo convesso $A\widehat{D}C$ è congruente alla somma degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ del quadrilatero.



Dimostrazione

Tracciamo la retta BD.

Consideriamo il triangolo ABD.

Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, si ha:

$\widehat{A} + A\widehat{B}D \cong 180° - A\widehat{D}B$

Ma $A\widehat{D}E \cong 180° - A\widehat{D}B$

Pertanto: $A\widehat{D}E \cong \widehat{A} + A\widehat{B}D$

Consideriamo il triangolo BDC.

$\widehat{C} + D\widehat{B}C \cong 180° - B\widehat{D}C$

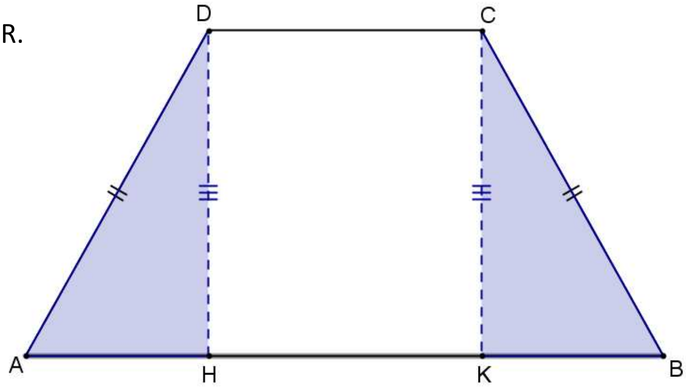
Ma $E\widehat{D}C \cong 180° - B\widehat{D}C$

Pertanto: $E\widehat{D}C \cong \widehat{C} + D\widehat{B}C$

Si conclude quindi che l'angolo convesso:

$A\widehat{D}C \cong A\widehat{D}E + E\widehat{D}C \cong \widehat{A} + A\widehat{B}D + \widehat{C} + D\widehat{B}C \cong \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$.

3. Dimostra che in un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono congruenti.



Dimostrazione

I due triangoli ADH e BCK sono congruenti per il IV C.C.T.R.
Infatti:
$AD \cong BC$ per ipotesi
$DH \cong CK$ perché altezze del trapezio

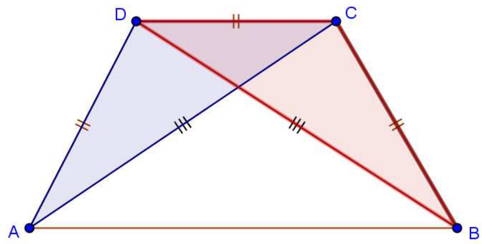
Pertanto gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ adiacenti alla base maggiore sono congruenti.

Anche gli angoli $\hat{D}$ e $\hat{C}$ adiacenti alla base minore sono congruenti, perché somma di angoli congruenti.

Infatti:
$A\hat{D}H \cong K\hat{C}B$ per la dimostrazione precedente.
$H\hat{D}C \cong D\hat{C}K \cong 90°$ perché le altezze sono perpendicolari alle basi.

4. Dimostra che, in un trapezio isoscele in cui i lati obliqui sono congruenti alla base minore, le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

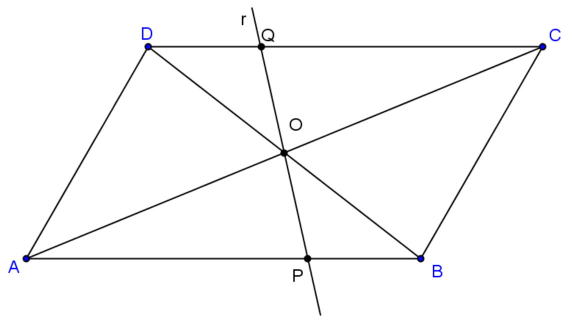
Ipotesi		*Tesi*
$ABCD$ è un trapezio isoscele $AD \cong DC \cong BC$	$\Rightarrow$	$C\hat{A}D \cong B\hat{A}C$ $A\hat{B}D \cong C\hat{B}D$



Dimostrazione
$C\hat{A}D \cong A\hat{C}D$ perché ACD è un triangolo isoscele.
$A\hat{C}D \cong C\hat{A}B$ perché angoli alterni interni
Per la proprietà transitiva si ha: $C\hat{A}D \cong C\hat{A}B$
In modo analogo si dimostra l'altra parte della tesi.

5. Sia O il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogramma ABCD. Traccia una retta r passante per O e indica con P il suo punto di intersezione con il lato AB e con Q il suo punto di intersezione con il lato CD. Dimostra che O è il punto medio dei PQ.

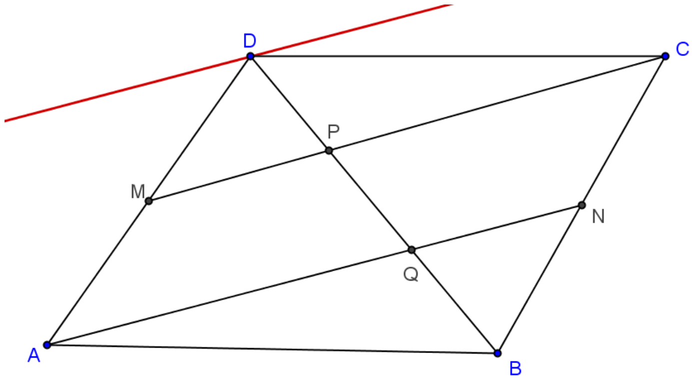
Ipotesi		*Tesi*
$ABCD$ è un parallelogramma *O è il punto di incontro delle diagonali*	$\Rightarrow$	*OP*$\cong OQ$



Dimostrazione
I triangoli $ODQ \cong OBP$ per il II C.C.T. Infatti:
$D\hat{O}Q \cong P\hat{O}B$ perché opposti al vertice
$OD \cong OB$ perché le diagonali si incontrano nel loro punto medio
$O\hat{D}Q \cong P\hat{B}O$ perché alterni interni
Pertanto si conclude che: OP$\cong OQ$.

6. In un parallelogramma ABCD, sia M il punto medio di AD ed N il punto medio di BC. Dimostra che:
   a. AN E MC sono paralleli

Ipotesi		*Tesi*
$ABCD$ è un parallelogramma $AM \cong MD$ $BN \cong NC$	$\Rightarrow$	$AN \parallel MC$



<u>*Dimostrazione*</u>
Ricordando il teorema: "Se un quadrilatero ha due lati opposti congruenti e paralleli, allora è un parallelogramma", si ha che: $ANCM$ *è un parallelogramma.*

Infatti:
Essendo ABCD un parallelogramma, si ha che: $AD \cong BC$ *e conseguentemente:* $AM \cong \frac{1}{2}AD \cong \frac{1}{2}BC \cong CN$ *;*
mentre $AM \parallel NC$ *perché segmenti appartenenti ai lati opposti* AD *e* BC *del parallelogramma.*

Essendo $ANCM$ *un parallelogramma, si conclude che:* $AN \parallel MC$ *.*