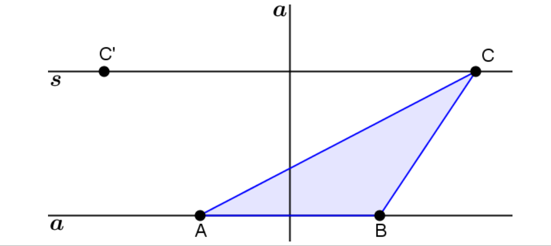
Prova di Matematica : Pitagora + Euclide + Similitidine

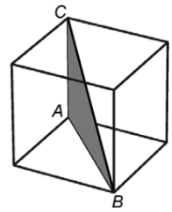
30.04.2013
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 2 C

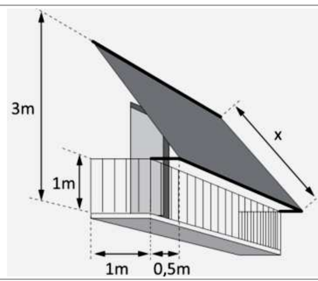
1. ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un punto qualunque della retta s parallela a r e passante per C. Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC ?
   - ☐ soltanto il triangolo ABC' , simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB
   - ☐ soltanto il triangolo isoscele di base AB
   - ☐ soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B
   - ☐ tutti gli infiniti triangoli di base AB



2. Nella figura è rappresentato un cubo il cui spigolo misura $1\ m$.
   Quanto misurano i lati del triangolo ABC?
   $\overline{AC} =$
   $\overline{AB} =$
   $\overline{BC} =$

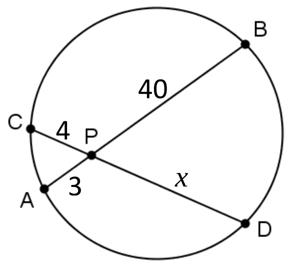


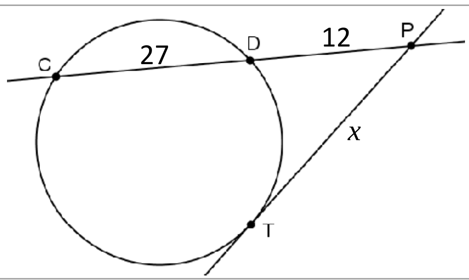
3. Occorre confezionare una tenda da sole per il balcone in figura. La tenda deve essere fissata al muro a 3 m di altezza dal pavimento del balcone, che è largo 1 m. La tenda deve sporgere 0,5 m dalla ringhiera che è alta 1 m.
   Determina la lunghezza x della tenda.
   $x =$

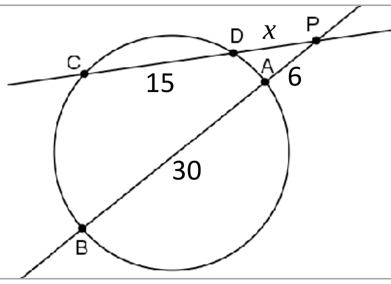


4. La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9.
   a. Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 cm, qual è all'incirca la sua altezza ? $h = . . .$
   b. Da quanti pollici è il televisore ? *Numero pollici* = . . .

5. In ciascuna delle seguenti figure, determina il valore incognito

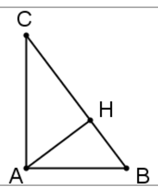




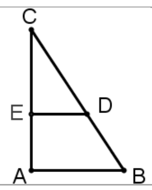


6. Risolvi i seguenti problemi sui triangoli.

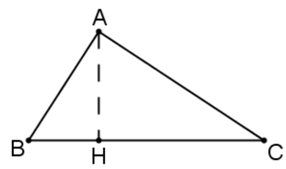
Nel triangolo rettangolo ABC, $\overline{AB} = 12\ cm$ e $\overline{BC} = 20\ cm$. Determina l'area del triangolo rettangolo ABH .



Il trapezio ABDE ha una superficie di $192\ cm^2$. Sapendo che le basi misurano $\overline{AB} = 20\ cm$ e $\overline{DE} = 12\ cm$, determina l'area del triangolo ABC .



In un triangolo rettangolo il rapporto fra un cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa è $\frac{5}{4}$. Sapendo che il perimetro del triangolo è $480\ m$, determina l'area del triangolo.



7. Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza. Sapendo che l'altezza del trapezio misura 6 cm e la base minore misura 4 cm, calcola la misura del perimetro del trapezio.

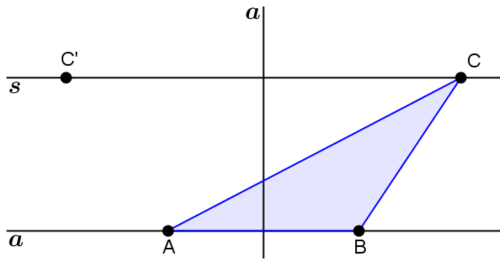
8. Un triangolo rettangolo avente il cateto $\overline{AC} = 6\ cm$ e l'ipotenusa $\overline{BC} = 10\ cm$ è circoscritto a un semicirconferenza. Determina la misura del raggio ?

Valutazione	Esercizio	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Totale
	Punti	2	3	4	6	15	30	10	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

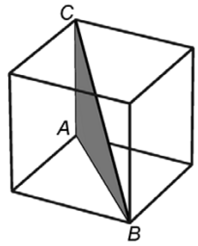
1. ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un punto qualunque della retta s parallela a r e passante per C. Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC ?



☐ tutti gli infiniti triangoli di base AB

2. Nella figura è rappresentato un cubo il cui spigolo misura $1\ m$.

   Quanto misurano i lati del triangolo ABC?



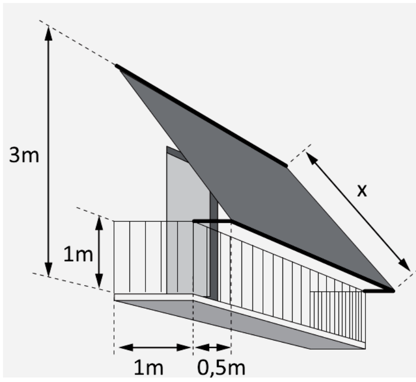
$\overline{AC} = 1\ m$

$\overline{AB} = \overline{AC} \cdot \sqrt{2}\ m = \sqrt{2}\ m$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}\ \ m = \sqrt{1+2}\ m = \sqrt{3}\ m$

3. Occorre confezionare una tenda da sole per il balcone in figura. La tenda deve essere fissata al muro a $3\ m$ di altezza dal pavimento del balcone, che è largo $1\ m$. La tenda deve sporgere $0{,}5\ m$ dalla ringhiera che è alta $1\ m$.

$x = \sqrt{2^2 + 1{,}5^2}\ m = \sqrt{4 + 2{,}25}\ m = \sqrt{6{,}25}\ m = 2{,}5\ m$

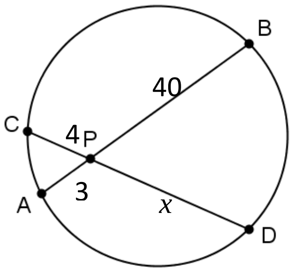
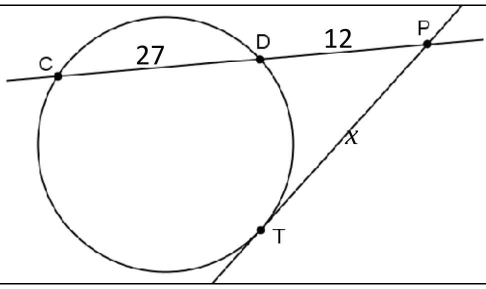
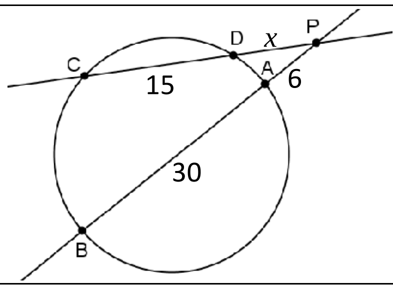


4. La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9.
   a. Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 cm, qual è la sua altezza ?
   b. Da quanti pollici è il televisore?

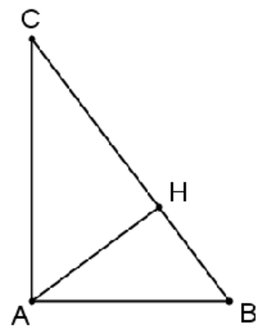
$h = \frac{9}{16} \cdot 57{,}5 = cm\ 32{,}34375$

$d = \sqrt{57{,}5^{\,2} + 32{,}34^{\,2}}\ cm = \sqrt{4352{,}37}\ cm \approx 66\ cm = \frac{66}{2{,}54}\ pollici \approx 26\ pollici\ .$

5. In ciascuna delle seguenti figure, determina il valore di x

		
$PC : PA = PB : PD$ $PD = \frac{PA \cdot PB}{PC} = \frac{3 \cdot 40}{4} = 30$	$PC : PT = PT : PD$ $PT = \sqrt{PC \cdot PD} = \sqrt{39 \cdot 12} = \sqrt{468} = 6\sqrt{13}$	$PC : PA = PB : PD$ $(x+15) : 6 = 36 : x$ $x \cdot (x+15) = 6 \cdot 36$ $x^2 + 15x - 216 = 0$ $PD = 9$

6.1. Nel triangolo rettangolo a lato, $\overline{AB} = 12\ cm$ e $\overline{BC} = 20\ cm$. Determina l'area del triangolo rettangolo ABH .



Soluzione 1

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{20^2 - 12^2}\ cm = \sqrt{400 - 144}\ cm = \sqrt{256}\ cm = 16\ cm$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{12 \cdot 16}{20}\ cm = 9{,}6\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABH si ha:

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 - (9{,}6)^2}\ cm = \sqrt{144 - 92{,}16}\ cm = \sqrt{51{,}84}\ cm = 7{,}2\ cm$$

Pertanto: $S_{AHB} = \dfrac{\overline{BH} \cdot \overline{AH}}{2} = \dfrac{7{,}2 \cdot 9{,}6}{2}\ cm^2 = 34{,}56\ cm^2$.

Soluzione 2

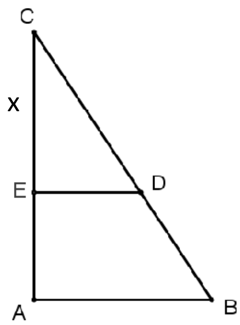
Applicando il T. di Pitagora: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{20^2 - 12^2}\ cm = \sqrt{400 - 144}\ cm = \sqrt{256}\ cm = 16\ cm$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{12 \cdot 16}{2}\ cm^2 = 96\ cm^2 .$$

Dalla similitudine dei triangoli ABC e ABH $(\ \hat{B}\ in\ comune \quad e \quad B\hat{A}C \cong A\hat{H}B = 90°\ )$ *si ha:*

$S_{ABH} : S_{ABC} = \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2$; $\qquad S_{ABH} : 96 = 12^2 : 20^2$; $\qquad S_{ABH} = \dfrac{96 \cdot 144}{400} cm^2 = 34{,}56\ cm^2$

6.2. Il trapezio $ABDE$ ha una superficie di 192 cm^2. Sapendo che le basi misurano $\overline{AB} = 20\ cm$ e $\overline{DE} = 12\ cm$, determina l'area del triangolo ABC .



Soluzione

$L'altezza\ del\ trapezio$ è: $\overline{AE} = \frac{2 \cdot S_{ABDE}}{\overline{AB} + \overline{DE}} = \frac{2 \cdot 192}{20+12}\ cm = 12\ cm$.

Ponendo $\overline{CE} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = x + 12$

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli ABC e CDE $(\ \hat{B} \cong C\hat{D}E \quad e \quad B\hat{A}C \cong C\hat{E}D = 90°\ )$ *si ha:*

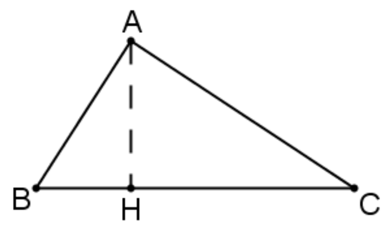
$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{AC} : \overline{CE}$; $\qquad 20 : 12 = (x + 12) : x$; $\qquad 20x = 12 \cdot (x + 12)$;

$20x = 12x + 144$; $\qquad 8x = 144$; $\qquad x = \dfrac{144}{8} = 18$

Pertanto: $\overline{CE} = 18\ cm \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = (18 + 12)\ cm = 30\ cm$.

L'area è: $S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{20 \cdot 30}{2}\ cm^2 = 300\ cm^2$.

6.3. In un triangolo rettangolo il rapporto fra un cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa è $\frac{5}{4}$. Sapendo che il perimetro del triangolo è 480 m, determina l'area del triangolo.



DATI $\begin{cases} p_{ABC} = 480\ m \\ \overline{AC} = \frac{5}{4}\overline{CH} \end{cases}$ $\qquad S_{ABC} = ?$

Soluzione

Ponendo $\overline{CH} = x$ *, con dominio di variabilità:* $x > 0$ *, si ha:* $\overline{AC} = \frac{5}{4}x$

$Applicando\ il\ 1°\ T\ di\ Euclide\ si\ ha$: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CH} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{BC} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{CH}} = \dfrac{\frac{25}{16}x^2}{x} = \dfrac{25}{16}x$

$Inoltre$: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\dfrac{625}{256}x^2 - \dfrac{25}{16}x^2} = \sqrt{\dfrac{625 - 400}{256}x^2} = \sqrt{\dfrac{225}{256}x^2} = \dfrac{15}{16}x$.

Utilizzando il perimetro $p = 480\ m$ *si ottiene:*

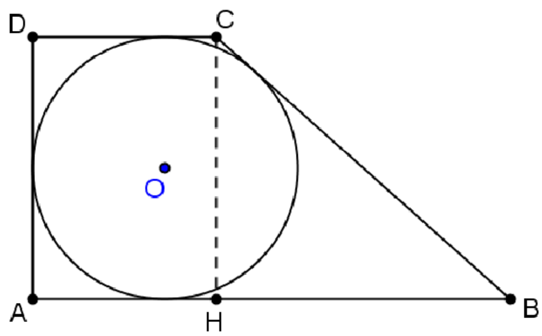
$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 480$; $\qquad \dfrac{15}{16}x + \dfrac{25}{16}x + \dfrac{5}{4}x = 480$; $\qquad 15x + 25x + 20x = 7680$

$60x = 7680$; $\qquad x = 128 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{CH} = 128\ m$.

$Quindi$: $\overline{AC} = \frac{5}{4} \cdot 128\ cm = 160\ m$ $\overline{AB} = \frac{15}{16} \cdot 128\ cm = 120\ m$

$Pertanto\ l'area\ del\ triangolo$ è: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 160\right) cm^2 = 9600\ m^2$.

7. Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza. Sapendo che l'altezza del trapezio misura 6 cm e la base minore misura 4 cm, calcola la misura del perimetro del trapezio.



Soluzione

Ponendo $\overline{BH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = x + 4$.

Ricordando che un quadrilatero è circoscrivibile a una circonferenza se la somma di due lati opposti è congruente alla somma degli altri due lati, si ha:

$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$; $6 + \overline{BC} = x + 4 + 4$; $\overline{BC} = x + 2$

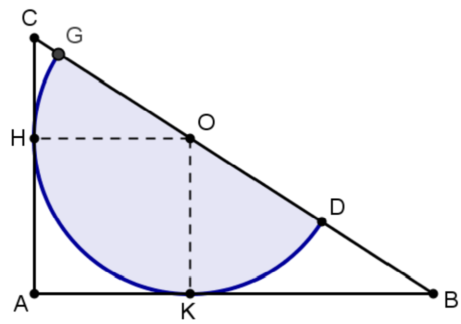
Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$; $(x+2)^2 = 6^2 + x^2$; $x^2 + 4 + 4x = 36 + x^2$; $4x = 32$; $x = 8$.

Pertanto $\overline{BH} = 8\ cm$, $\overline{AB} = 12\ cm$, $\overline{BC} = 10\ cm$

$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = (12 + 10 + 4 + 6)\ cm = 32\ cm$.

8. Un triangolo rettangolo avente il cateto $\overline{AC} = 6\ cm$ e l'ipotenusa $\overline{BC} = 10\ cm$ è circoscritto a un semicirconferenza. Determina la misura del raggio ?



Soluzione

Determiniamo la misura dell'altro cateto:

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{35^2 - 21^2}\ cm = \sqrt{1225 - 441}\ cm = \sqrt{784}\ cm = 8\ cm$.

Ponendo il raggio $\overline{OH} = \overline{OK} = x$ *con* $0 < x < 6$

$\Rightarrow$ $\overline{CH} = 6 - x$ *e* $\overline{BK} = 8 - x$.

Dalla similitudine dei due triangoli $CHO \sim BKO$ si ha:

$\overline{CH} : \overline{OK} = \overline{OH} : \overline{BK}$; $(6 - x) : x = x : (8 - x)$; $x^2 = (6 - x)(8 - x)$;

$x^2 = 48 - 6x - 8x + x^2$; $14x = 48$; $x = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$;

Pertanto il raggio $r = \frac{24}{7}\ cm$.