Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Retta + Isometrie + Equiestensione

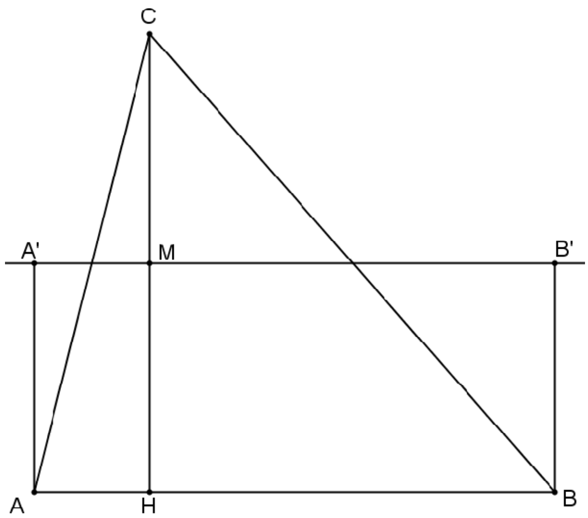
06.04.2013
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

A. Dato il triangolo di vertici: $A\,(0;\ 2)$, $B\,(3;\ 7)$, $C\,(-4;\ 6)$:

1. determina l'area utilizzando la formula dell'area
2. determina l'area senza utilizzare la formula dell'area
3. determina le coordinate dell'ortocentro T
4. determina le coordinate del baricentro G utilizzando la formula del baricentro
5. determina le coordinate del baricentro G senza utilizzare la formula del baricentro
6. determina le coordinate del circocentro E
7. determina, con i due metodi, il quarto vertice del parallelogramma, i cui primi tre vertici sono i punti A, B e C
8. determina il triangolo $A_1B_1C_1$ simmetrico del triangolo ABC rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante
9. determina il triangolo $A_2B_2C_2$ simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto $P(-1;\ 1)$.
10. effettua la traslazione del triangolo ABC secondo il vettore $\vec{v}\,(5;-2)$
11. effettua la composizione $S_{C_2} \circ S_{C_1}$ delle due simmetrie centrali S_{C_1} di centro $P(3;\ 6)$ e S_{C_2} di centro $P(4;\ 2)$
12. determina quale tipo di isometria è equivalente alla composizione delle due isometrie $S_{C_2} \circ S_{C_1}$.

B. Dato un triangolo ABC, traccia l'altezza CH relativa alla base AB. Sia M il punto medio dell'altezza CH. Costruisci le proiezioni A' e B' di A e B sulla retta parallela ad AB passante per M. Dimostra che il triangolo ABC è equivalente al rettangolo ABB'A'.



Valutazione	Esercizio	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	B	Totale
	Punti	4	8	8	2	8	8	8	4	4	4	8	4	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

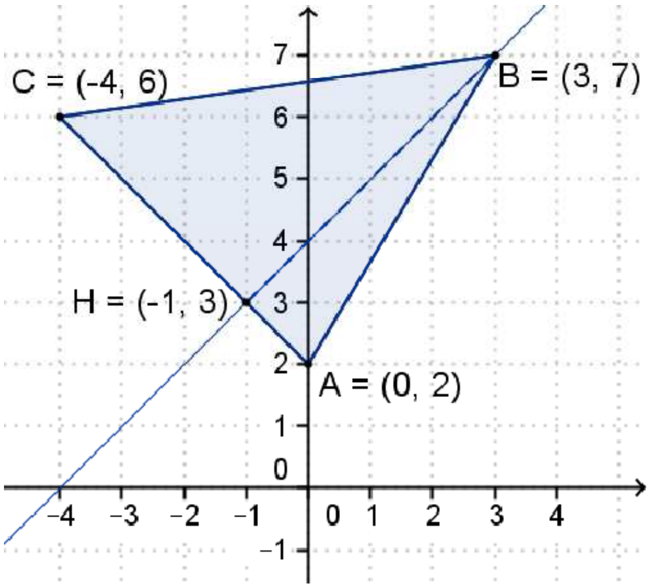
Dato il triangolo di vertici: $A\,(0;\ 2)$, $B\,(3;\ 7)$, $C\,(-4;\ 6)$:

1. determina l'area utilizzando la formula dell'area

$$S=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1\\ 3 & 7 & 1\\ -4 & 6 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{matrix} 0 & 2 & 1\\ 3 & 7 & 1\\ -4 & 6 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 2\\ 3 & 7\\ -4 & 6\end{matrix}=\frac{1}{2}\left[0-8+18-(-28+0+6)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}[10+22]=\mathbf{16}\,.$$

2. determina l'area senza utilizzare la formula dell'area



Metodo 1

La misura della base AC è:

$$\overline{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(0+4)^2+(2-6)^2}=$$
$$\sqrt{16+16}\;=\;\sqrt{32}\;=\;4\sqrt{2}$$

Per determinare la misura dell'altezza BH occorre determinare le coordinate del punto H, intersezione fra le rette AC e BH.

Determiniamo l'equazione della retta AC:

$$\frac{y-y_C}{y_A-y_C}=\frac{x-x_C}{x_A-x_C}\;;\qquad \frac{y-6}{2-6}=\frac{x+4}{0+4}\;;\qquad \frac{y-6}{-4}=\frac{x+4}{4}$$

$$y-6=-x-4\;;\qquad y=-x+2$$

Il coefficiente angolare della retta AC è $m_{AC}=-1$.

Pertanto, essendo BH perpendicolare ad AC, si ha $m_{BH}=+1$

Determiniamo l'equazione della retta BH:

$$y-y_B=m_{BH}(x-x_B)\;;\qquad y-7=+1(x-3)\;;\qquad y-7=x-3\;;\qquad y=x+4$$

Determiniamo le coordinate del punto H:

$$\begin{cases} y=-x+2\\ y=x+4\end{cases}\qquad \begin{cases} x+4=-x+2\\ -\end{cases}\qquad \begin{cases} 2x=-2\\ -\end{cases}\qquad \begin{cases} x=-1\\ y=-1+4=3\end{cases}\qquad \begin{cases} x=-1\\ y=3\end{cases}\qquad\Rightarrow\qquad H(-1;3)$$

La misura dell'altezza BH è:

$$\overline{BH}=\sqrt{(x_B-x_H)^2+(y_B-y_H)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(7-3)^2}=\sqrt{16+16}\;=\;\sqrt{32}\;=\;4\sqrt{2}\,.$$

L'area del triangolo è: $\boldsymbol{S}\;=\;\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH}\;=\frac{1}{2}\;4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}\;=\;\mathbf{16}$.

Metodo 2

La misura della base AC è: $\overline{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(0+4)^2+(2-6)^2}=\sqrt{16+16}\;=\;\sqrt{32}\;=\;4\sqrt{2}$

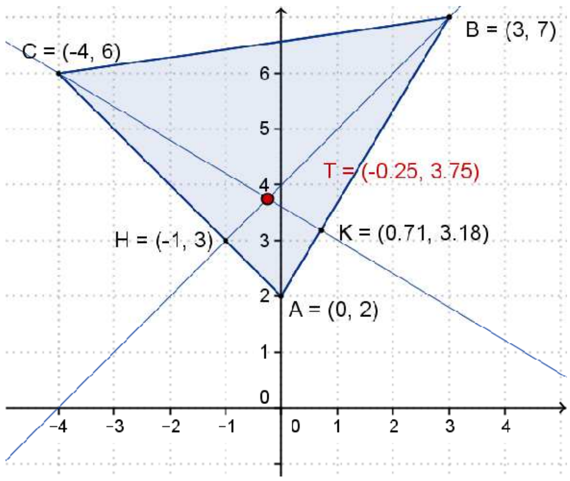
L'equazione della retta AC è: $\frac{y-y_C}{y_A-y_C}=\frac{x-x_C}{x_A-x_C}\;;\qquad \frac{y-6}{2-6}=\frac{x+4}{0+4}\;;\qquad \frac{y-6}{-4}=\frac{x+4}{4}\;;\qquad y-6=-x-4\;;\qquad y=-x+2$

La misura dell'altezza BH è:

$$BH=\frac{|y_B-m_{AC}\cdot x_B-q|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{|7+1\cdot3-2|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{|8|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

L'area del triangolo è: $\boldsymbol{S}\;=\;\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH}\;=\frac{1}{2}\;4\sqrt{2}\cdot4\sqrt{2}\;=\;\mathbf{16}$

3. L'ortocentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre altezze.



Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-2}{3-0} = \frac{5}{3}$$

La retta CK perpendicolare alla retta AB ha coefficiente angolare:

$$m_{CK} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{3}{5}$$

L'equazione dell'altezza CK è:

$y - y_C = m_{CK}\,(x - x_C)\,;\qquad y - 6 = -\frac{3}{5}\,(x+4)\,;$

$y = -\frac{3}{5}x - \frac{12}{5} + 6\,;\qquad y = -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5}\,.$

Determiniamo le coordinate dell'ortocentro T, punto di incontro delle due altezze BH e CK :

$$\begin{cases} y = x+4 \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x + 4 = -\frac{3}{5}x + \frac{18}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 20 = -3x + 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = +\frac{15}{4} \end{cases}$$

Pertanto l'ortocentro ha coordinate: $\boldsymbol{T\left(-\frac{1}{4};\ \frac{15}{4}\right)}$.

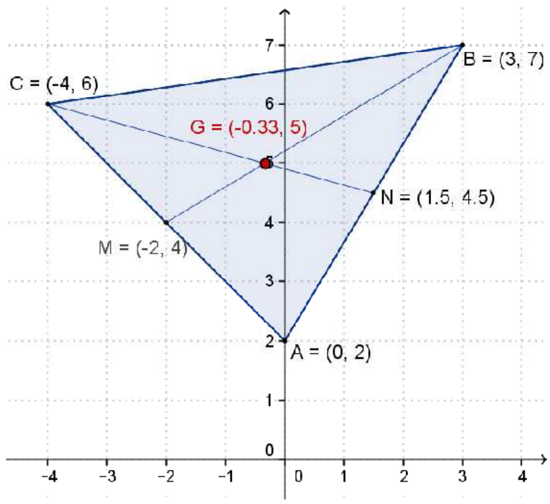
4. Determina le coordinate del baricentro utilizzando la formula del baricentro

Il baricentro del triangolo ha coordinate:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0+3-4}{3} = -\frac{1}{3}$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{2+7+6}{3} = 5$$

$\boldsymbol{G\left(-\frac{1}{3};\ 5\right)}$

5. Il baricentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre mediane.



Il punto medio M del lato AC ha coordinate: $M(-2;\ 4)$

L'equazione della mediana BM é:

$$\frac{y - y_M}{y_B - y_M} = \frac{x - x_M}{x_B - x_M}\,;\qquad \frac{y-4}{7-4} = \frac{x+2}{3+2}\,;\qquad \frac{y-4}{3} = \frac{x+2}{5}\,;$$

$$5(y-4) = 3(x+2)\,;\qquad 5y - 20 = 3x + 6\,;\qquad y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5}$$

Il punto medio N del lato BC ha coordinate: $N\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{2}\right)$

L'equazione della mediana CN è:

$$\frac{y - y_N}{y_C - y_N} = \frac{x - x_N}{x_C - x_N}\,;\qquad \frac{y - \frac{9}{2}}{6 - \frac{9}{2}} = \frac{x - \frac{3}{2}}{-4 - \frac{3}{2}}\,;\qquad \frac{y - \frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{x - \frac{3}{2}}{-\frac{11}{2}}\,;\qquad -\frac{11}{2}\left(y - \frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)\,;$$

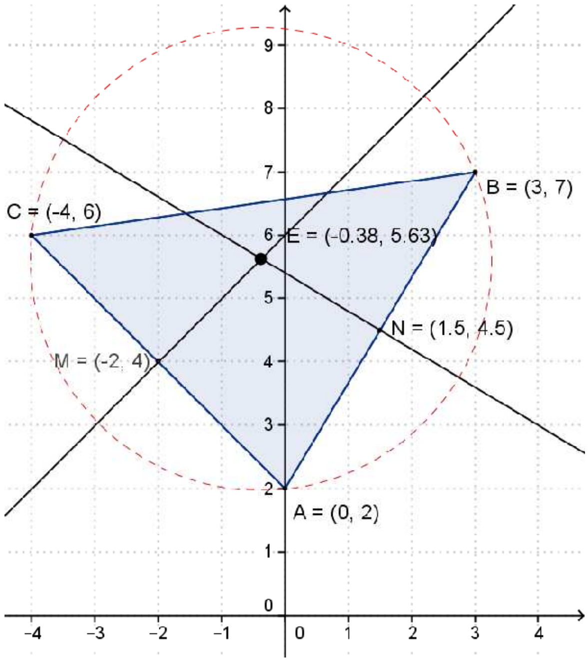
$$-11\left(y - \frac{9}{2}\right) = 3\left(x - \frac{3}{2}\right)\,;\qquad -11y + \frac{99}{2} = 3x - \frac{9}{2}\,;\qquad -22y + 99 = 6x - 9\,;\qquad 3x + 11y - 54 = 0\,.$$

Determiniamo le coordinate del baricentro G, punto di incontro delle due mediane BM e CN :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x + \frac{26}{5} \\ 3x + 11y - 54 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 11\left(\frac{3}{5}x + \frac{26}{5}\right) - 54 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + \frac{33}{5}x + \frac{286}{5} - 54 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x + 33x + 286 - 270 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 48x = -16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{16}{48} = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{26}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{26}{5} = \frac{25}{5} = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{G\left(-\frac{1}{3};\ 5\right)}$$

6. Il circocentro di un triangolo è il punto d'incontro dei tre assi.



Il punto medio M del lato AC ha coordinate: $M(-2;\ 4)$

Il coefficiente angolare della retta AC è: $m_{AC} = -1$

Il coefficiente angolare dell'asse del lato AC è: $m_{a_{AC}} = +1$

L'equazione dell'asse del lato AC è:

$y - y_M = m_{a_{AC}}\,(x - x_M)\,;$ $\qquad y - 4 = +1\,(x + 2)\,;$
$y = x + 6$

Il punto medio N del lato AB ha coordinate: $N\left(\frac{3}{2};\ \frac{9}{2}\right)$

Il coefficiente angolare della retta AB è: $m_{AB} = \frac{5}{3}$

Il coefficiente angolare dell'asse del lato AB è: $m_{a_{AB}} = -\frac{3}{5}$

L'equazione dell'asse del segmento AB è:

$y - y_N = m_{a_{AB}}\,(x - x_N)\,;$ $\qquad y - \frac{9}{2} = -\frac{3}{5}\left(x - \frac{3}{2}\right);$ $\qquad y - \frac{9}{2} = -\frac{3}{5}x + \frac{9}{10}\,;$ $\qquad y = -\frac{3}{5}x + \frac{27}{5}$

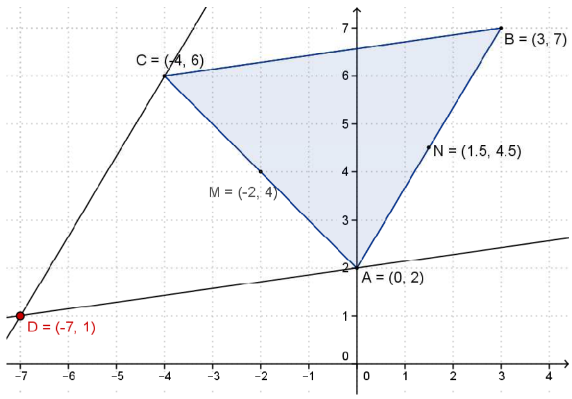
Le coordinate del circocentro E, punto di incontro dei due assi, si ottengono risolvendo il sistema:

Determiniamo le coordinate del *circocentro E*, punto di incontro dei due assi a_{AB} e a_{AC} :

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{27}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 6 = -\frac{3}{5}x + \frac{27}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 30 = -3x + 27 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = -\frac{3}{8} + 6 = \frac{45}{8} \end{cases}$$

Pertanto il circocentro ha coordinate: $\boldsymbol{E\left(-\frac{3}{8}\,;\ \frac{45}{8}\right)}$.

7. Il quarto vertice D del parallelogramma è il punto di intersezione delle due rette r ed s :



La retta r passante per il punto C e parallela al lato AB
La retta s passante per il punto A e parallela al lato BC.

La retta r passante per il punto C e parallela al lato AB ha equazione:

$y - y_C = m_{AB}\,(x - x_C)\,;$ $\qquad y - 6 = \frac{5}{3}\,(x + 4)\,;$

$y = \frac{5}{3}x + \frac{20}{3} + 6\,;$ $\qquad y = \frac{5}{3}x + \frac{38}{3}$

La retta s passante per il punto A e parallela al lato BC ha equazione:

$y - y_A = m_{BC}\,(x - x_A)\,;$ $\qquad y - 2 = \frac{1}{7}x\,;$ $\qquad y = \frac{1}{7}x + 2$

Le coordinate del quarto vertice D del parallelogramma si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x + \frac{38}{3} \\ y = \frac{1}{7}x + 2 \end{cases} \qquad \left\{ \frac{5}{3}x + \frac{38}{3} = \frac{1}{7}x + 2 \right. \qquad \left\{ 35x + 266 = 3x + 42 \right. \qquad \left\{ 32x = -224 \right. \qquad \begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D(-7;\ 1)}$$

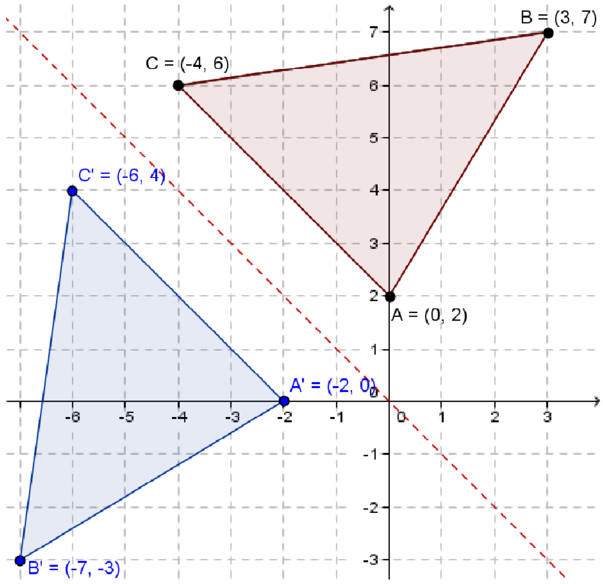
Il quarto vertice può essere calcolato anche con le formule:

$$\begin{matrix} x_D + x_B = x_A + x_C \\ y_D + y_B = y_A + y_C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_D + 3 = 0 - 4 \\ y_D + 7 = 2 + 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_D = -7 \\ y_D = +1 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{D(-7;\ 1)}$$

8. Per determinare il triangolo $A_1B_1C_1$ simmetrico del triangolo ABC rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante occorre utilizzare le equazioni:

$$\begin{cases} x^I = -y \\ y^I = -x \end{cases} \quad \text{si ottiene:}$$

$$\begin{cases} x_{A^I} = -2 \\ y_{A^I} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B^I} = -7 \\ y_{B^I} = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C^I} = -6 \\ y_{C^I} = 4 \end{cases}$$



9. Determina il triangolo $A_2B_2C_2$ simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto $P(-1;\ 1)$.

Per determinare il triangolo $A_2B_2C_2$ simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto $P(-1;\ 1)$
occorre utilizzare le equazioni della simmetria centrale.

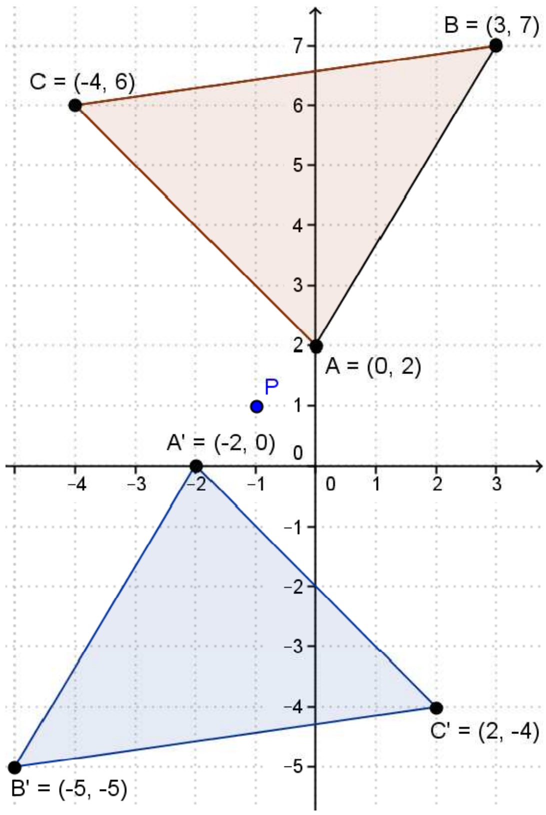
$$\begin{cases} x^I = -x + 2p \\ y^I = -y + 2q \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} x_{A^I} = -0 + 2(-1) = -2 \\ y_{A^I} = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B^I} = -3 + 2(-1) = -5 \\ y_{B^I} = -7 + 2 \cdot 1 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{C^I} = -(-4) + 2(-1) = 2 \\ y_{C^I} = -6 + 2 \cdot 1 = -4 \end{cases}$$



10. Effettua la traslazione del triangolo ABC secondo il vettore $\vec{v}\,(5;-2)$

Per effettuare la traslazione del triangolo ABC secondo il vettore $\vec{v}\,(5;-2)$ occorre applicare le formule:

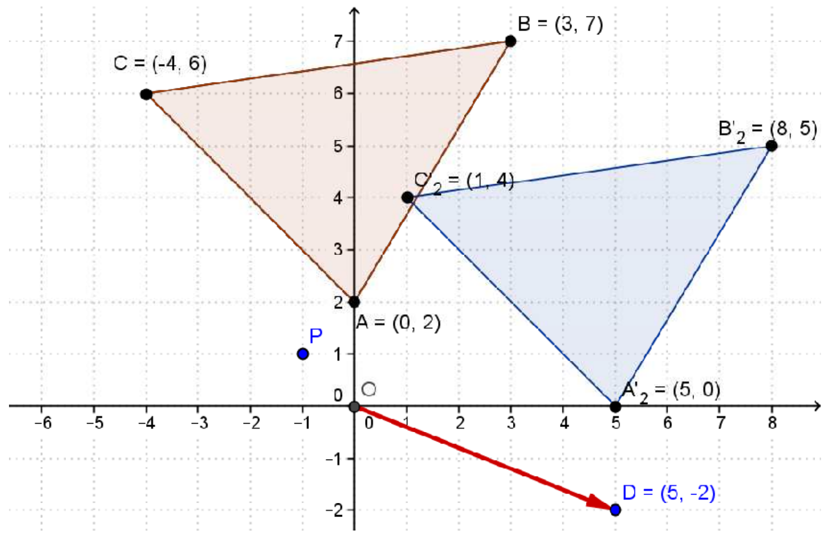
$$\begin{cases} x^I = x + a \\ y^I = y + b \end{cases}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} x_{A^I} = 0 + 5 = 5 \\ y_{A^I} = -2 + (-2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{B^I} = 3 + 5 = 8 \\ y_{B^I} = 7 + (-2) = 5 \end{cases}$$

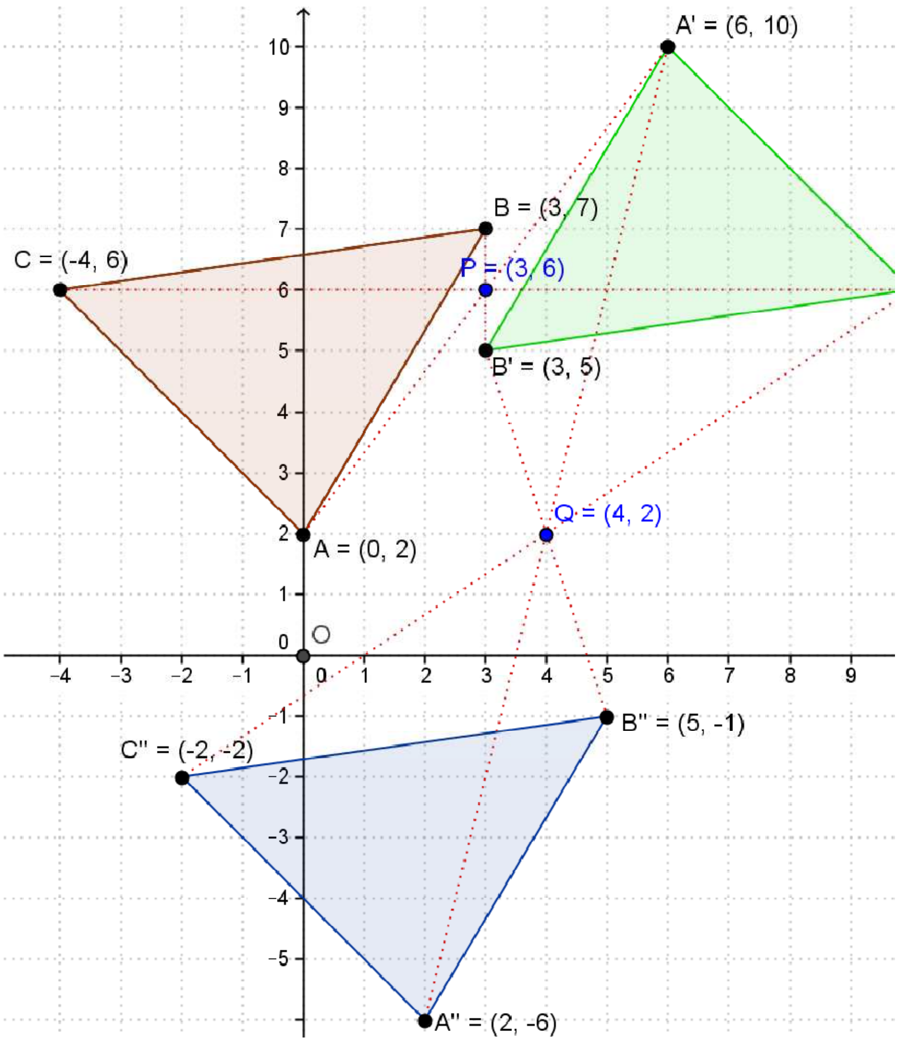
$$\begin{cases} x_{C^I} = -4 + 5 = 1 \\ y_{C^I} = 6 + (-2) = 4 \end{cases}$$

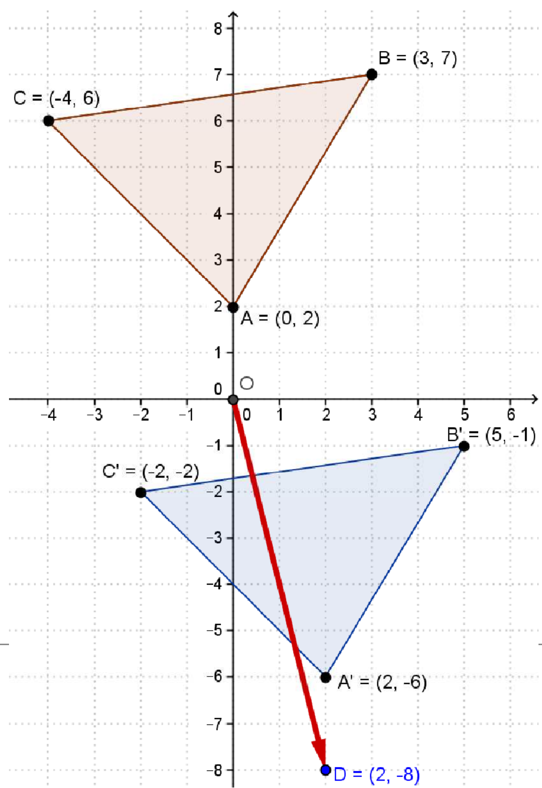


11. effettua la composizione delle due simmetrie centrali: S_{C_1} di centro $P(3;\ 6)$ e S_{C_2} di centro $P(4;\ 2)$

Effetttuando la simmetria centrale S_{C_1} si ottiene il triangolo T^I di vertici: $A^I(6;\ 10)$, $B^I(3;\ 5)$, $C^I(10;\ 6)$

Effetttuando la simmetria centrale S_{C_2} si ottiene il triangolo T^{II} di vertici: $A^{II}(2;\ -6)$, $B^{II}(5;\ -1)$, $C^{II}(-2;\ -2)$

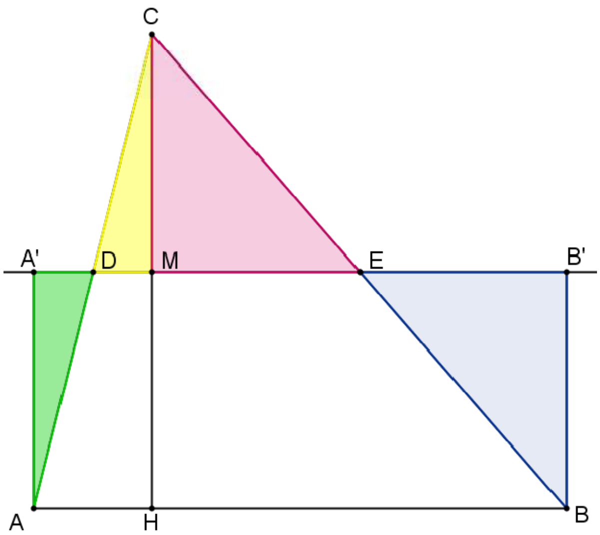




12. determina quale tipo di isometria è equivalente alla composizione delle due isometrie S_{C_1} e S_{C_2} .

L'isometria equivalente alla composizione delle due isometrie S_{C_1} e S_{C_2} è la traslazione di vettore $\vec{v}\ (2; -8)$.

B. Dato un triangolo ABC, traccia l'altezza CH relativa alla base AB. Sia M il punto medio dell'altezza CH. Costruisci le proiezioni A' e B' di A e B sulla retta parallela ad AB passante per M. Dimostra che il triangolo ABC è equivalente al rettangolo ABB'A'.



Dimostrazione

Per dimostrare che il triangolo ABC è equivalente al rettangolo ABB'A' occorre dimostrare che i due poligoni sono equicomposti. Cioè occorre dimostrare che i triangoli:

$AA'D \cong CDM$ e $CEM \cong BB'E$

$AA'D \cong CDM$ per il III C.C.T.R. Infatti:
$AA' \cong CM$ perché $AA' \cong MH \cong CM$
$A\hat{D}A' \cong C\hat{D}M$ perché opposti al vertice

$CEM \cong BB'E$ per il III C.C.T.R. Infatti:
$CM' \cong BB'$ perché $CM' \cong MH \cong BB'$
$C\hat{E}M \cong B\hat{E}B'$ perché opposti al vertice.