Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Equazioni di grado superiore al I

23.02.2013

Alunno: ___________________________________ Classe: 2 C

prof. Mimmo Corrado

A. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$24y + 13 - 4y^2 = 0$	$10x^2 - 2 = x$
$x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 2 - 2\sqrt{6} = 0$	$x^3 + 8 = 0$;
$12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$	$16x^4 - 1 = 0$
$\dfrac{2x-1}{4x^2+16x+15} + \dfrac{2}{2x+3} = \dfrac{x+4}{2x^2+9x+10}$	$\dfrac{4}{5}x^3 - \dfrac{2}{5}x^2 + 2x - 1 = 0$
$\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{4} = \dfrac{1}{3}x - 3$	$\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)^4 - 2\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)^2 - \dfrac{9}{16} = 0$

B. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $2k\,x^2 + (k^2 - 6)x - 3k = 0$

a. *ha soluzioni reali*
b. *ha una sola soluzione*
c. *ha due soluzioni reali e coincidenti*
d. *ha due radici la cui somma è* -1
e. *ha due radici reali e opposte*
f. *ha una radice uguale a* 1
g. *ha due radici, la somma dei cui reciproci è 1*

B. Effettua la discussione della seguente equazione letterale intera*:* $(a-3)x^2 + 2(a-4)x - 4 = 0$

C. In un triangolo rettangolo, un cateto misura $7\ cm$ in più dell'altro cateto e l'ipotenusa $14\ cm$ in meno della somma dei due cateti. Determina:
   a. la lunghezza dei tre lati
   b. l'ampiezza dei suoi angoli.

Valutazione	Esercizio	A	B	C	D	Totale
	Punti	35	15	15	15	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Risolvi le seguenti equazioni:

$\mathbf{24y + 13 - 4y^2 = 0}$; $\quad 4y^2 - 24y - 13 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 144 + 52 = 196$;

$$x_{1,2} = \frac{12 \mp \sqrt{196}}{4} = \frac{12 \mp 14}{4} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{12-14}{4} = -\frac{2}{4} = \mathbf{-\frac{1}{2}} \\ x_2 = \frac{12+14}{4} = +\frac{26}{4} = \mathbf{+\frac{13}{2}} \end{array}$$

$\mathbf{10x^2 - 2 = x}$; $\quad 10x^2 - x - 2 = 0$; $\quad \Delta = 1 + 80$

$$x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{81}}{2 \cdot 10} = \frac{1 \mp 9}{20} = \begin{array}{l} x_1 = \frac{1-9}{20} = -\frac{8}{20} = \mathbf{-\frac{2}{5}} \\ x_2 = \frac{1+9}{20} = +\frac{10}{20} = \mathbf{+\frac{1}{2}} \end{array}$$

$\mathbf{x^2 - 2\sqrt{3}\,x - 2 - 2\sqrt{6} = 0}$; $\quad \frac{\Delta}{4} = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 + 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} = \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{3} \mp \sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}}{1} = \sqrt{3} \mp \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = \mathbf{-\sqrt{2}} \\ x_2 = \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \mathbf{+2\sqrt{3} + \sqrt{2}} \end{array}$$

$\mathbf{x^3 + 8 = 0}$; $\quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$; $\quad \begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \end{array} \quad x + 2 = 0$; $\quad x_1 = \mathbf{-2}$

$x^2 - 2x + 4 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 1 - 4 = -3$; $\quad x_{2,3} = \frac{1 \mp \sqrt{-3}}{1} = \mathbf{1 \mp \sqrt{3}\,i}$

$\mathbf{12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0}$;

Non essendo $x = 0$ una soluzione dell'equazione, si può dividere per $x^2 \neq 0$:

$12x^2 + 4x - 41 + \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$;

si raccolgono a fattor comune parziale i coefficienti dei termini estremi e di quelli equidistanti dagli estremi :

$12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 41 = 0 \qquad$ Si pone $\quad x + \frac{1}{x} = z \quad \wedge \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$

$12(z^2 - 2) + 4z - 41 = 0$; $\quad 12z^2 - 24 + 4z - 41 = 0$; $\quad 12z^2 + 4z - 65 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 4 + 780 = 784$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{784}}{12} = \frac{-2 \mp 28}{12} = \begin{array}{l} z_1 = \frac{-2-28}{12} = -\frac{30}{12} = -\frac{5}{2} \\ z_2 = \frac{-2+28}{12} = +\frac{26}{12} = +\frac{13}{6} \end{array}$$

Sostituendo $z = x + \frac{1}{x}$ si ha:

$$\begin{array}{llll} z_1 = -\frac{5}{2} & x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} & 2x^2 + 5x + 2 = 0 & \begin{array}{l} x_1 = \mathbf{-2} \\ x_1 = \mathbf{-\frac{1}{2}} \end{array} \\ z_2 = +\frac{13}{6} & x + \frac{1}{x} = +\frac{13}{6} & 6x^2 - 13x + 6 = 0 & \begin{array}{l} x_1 = \mathbf{+\frac{2}{3}} \\ x_1 = \mathbf{+\frac{3}{2}} \end{array} \end{array}$$

$\mathbf{16x^4 - 1 = 0}$; $\quad (4x^2+1)(4x^2-1) = 0$;

$4x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = +\frac{1}{4} \quad x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{1}{4}} = \mp\frac{1}{2}$

$4x^2 + 1 = 0 \quad x^2 = -\frac{1}{4} \quad x_{3,4} = \mp\sqrt{-\frac{1}{4}} = \mp\frac{1}{2}i$

$\mathbf{\frac{2x-1}{4x^2+16x+15} + \frac{2}{2x+3} = \frac{x+4}{2x^2+9x+10}}$; $\quad \frac{2x-1}{4x^2+16x+15} + \frac{2}{2x+3} - \frac{x+4}{2x^2+9x+10} = 0$;

$\frac{2x-1}{(2x+3)(2x+5)} + \frac{2}{2x+3} - \frac{x+4}{(x+2)(2x+5)} = 0$; $\quad C.E.: \quad x \neq -\frac{3}{2} \ \wedge \ x \neq -\frac{5}{2} \ \wedge \ x \neq -2$

moltiplichiamo per il $\ m.c.m. = (2x+3)(x+2)(2x+5)$

$(x+2)(2x-1) + 2(x+2)(2x+5) - (2x+3)(x+4) = 0$;

$2x^2 - x + 4x - 2 + 2(2x^2 + 5x + 4x + 10) - (2x^2 + 8x + 3x + 12) = 0$;

$2x^2 - x + 4x - 2 + 4x^2 + 10x + 8x + 20 - 2x^2 - 8x - 3x - 12 = 0$;

$-x + 4x - 2 + 4x^2 + 10x + 20 - 3x - 12 = 0$;

$4x^2 + 10x + 6 = 0$; $\quad 2x^2 + 5x + 3 = 0$; $\quad \Delta = 25 - 24 = 1$

$x_{1,2} = \frac{-5 \mp \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \mp 1}{4} = \quad x_1 = \frac{-5-1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \textit{non accettabile}$

$x_2 = \frac{-5+1}{4} = -\frac{4}{4} = \mathbf{-1}$

$\mathbf{\frac{4}{5}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + 2x - 1 = 0}$; $\quad 4x^3 - 2x^2 + 10x - 5 = 0$; $\quad 2x^2(2x-1) + 5(2x-1) = 0$;

$(2x-1)(2x^2+5) = 0$;

$2x - 1 = 0$; $\quad x_1 = +\frac{1}{2}$

$2x^2 + 5 = 0$; $\quad x^2 = -\frac{5}{2}$; $\quad x_{2,3} = \mp\sqrt{-\frac{5}{2}} = \mp\frac{\sqrt{10}}{2}i$

$\mathbf{\frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{1}{3}x - 3}$; $\quad \frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{1}{3}x + 3 = 0 \quad$ *moltiplichiamo per il* $\ m.c.m. = 12$

$6(x+1) - 3(x+1)^2 - 4x + 36 = 0$; $\quad 6x + 6 - 3(x^2 + 1 + 2x) - 4x + 36 = 0$;

$6x + 6 - 3x^2 - 3 - 6x - 4x + 36 = 0$; $\quad -3x^2 - 4x + 39 = 0$; $\quad 3x^2 + 4x - 39 = 0$;

$\frac{\Delta}{4} = 4 + 117 = 121$; $\quad x_{1,2} = \frac{-2 \mp \sqrt{121}}{3} = \frac{-2 \mp 11}{3} = \quad x_1 = \frac{-2-11}{3} = -\frac{13}{3}$

$x_2 = \frac{-2+11}{3} = +\frac{9}{3} = \mathbf{+3}$

$\mathbf{\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^4 - 2\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^2 - \frac{9}{16} = 0}$; $\quad$ *Si pone*: $\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^2 = z$

$z^2 - 2z - \frac{9}{16} = 0$; $\quad 16z^2 - 32z - 9 = 0$; $\quad \frac{\Delta}{4} = 256 + 144 = 400$;

$z_{1,2} = \frac{16 \mp \sqrt{400}}{16} = \frac{16 \mp 20}{16} = \quad z_1 = \frac{16-20}{16} = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$

$z_2 = \frac{16+20}{16} = +\frac{36}{16} = +\frac{9}{4}$

$$\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^2 = -\frac{1}{4} \qquad \frac{3x}{x^2+1} = \mp\sqrt{-\frac{1}{4}} \qquad \frac{3x}{x^2+1} = \mp\frac{1}{2}i$$

$$\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)^2 = +\frac{9}{4} \qquad \frac{3x}{x^2+1} = \mp\sqrt{+\frac{9}{4}} \qquad \frac{3x}{x^2+1} = \mp\frac{3}{2}$$

Determiniamo prima le soluzioni reali :

$\frac{3x}{x^2+1} = -\frac{3}{2}$; $\quad \frac{3x}{x^2+1} + \frac{3}{2} = 0$; $\quad C.E.: \ \forall x \in R \quad$ *moltiplichiamo per il* $\ m.c.m. = 2(x^2+1)$

$2 \cdot 3x + 3 \cdot (x^2+1) = 0$; $\quad 6x + 3x^2 + 3 = 0$; $\quad x^2 + 2x + 1 = 0$; $\quad (x+1)^2 = 0$; $\quad x + 1 = 0$;

$x = -1$ *soluzione doppia* $\quad x_{1,2} = \mathbf{-1}$.

$\frac{3x}{x^2+1} = +\frac{3}{2}$; $\quad \frac{3x}{x^2+1} - \frac{3}{2} = 0$; $\quad C.E.: \ \forall x \in R \quad$ *moltiplichiamo per il* $\ m.c.m. = 2(x^2+1)$

$2 \cdot 3x - 3 \cdot (x^2+1) = 0$; $\quad 6x - 3x^2 - 3 = 0$; $\quad x^2 - 2x + 1 = 0$; $\quad (x-1)^2 = 0$; $\quad x - 1 = 0$;

$x = +1$ *soluzione doppia* $\quad x_{3,4} = \mathbf{+1}$.

Mentre le soluzioni complesse sono :

$\frac{3x}{x^2+1} = -\frac{1}{2}i$; $\quad \frac{3x}{x^2+1} + \frac{1}{2}i = 0$; $\quad C.E.: \ \forall x \in R \quad$ *moltiplichiamo per il* $\ m.c.m. = 2(x^2+1)$

$2 \cdot 3x + i \cdot (x^2+1) = 0$; $\quad 6x + ix^2 + i = 0$; $\quad i\,x^2 + 6x + i = 0$;

$\frac{\Delta}{4} = 9 - i^2 = 9 + 1 = 10$; $\quad x_{5,6} = \frac{-3 \mp \sqrt{10}}{i} = \frac{-3 \mp \sqrt{10}}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-3i \mp \sqrt{10}\,i}{i^2} = \frac{-3i \mp \sqrt{10}\,i}{-1} = \mathbf{3i \pm \sqrt{10}\,i}$

$\frac{3x}{x^2+1} = +\frac{1}{2}i$; $\quad \frac{3x}{x^2+1} - \frac{1}{2}i = 0$; $\quad C.E.: \ \forall x \in R \quad$ *moltiplichiamo per il* $\ m.c.m. = 2(x^2+1)$

$2 \cdot 3x - i \cdot (x^2+1) = 0$; $\quad 6x - ix^2 - i = 0$; $\quad i\,x^2 - 6x + i = 0$;

$\frac{\Delta}{4} = 9 - i^2 = 9 + 1 = 10$; $\quad x_{7,8} = \frac{+3 \mp \sqrt{10}}{i} = \frac{3 \mp \sqrt{10}}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{3i \mp \sqrt{10}\,i}{i^2} = \frac{3i \mp \sqrt{10}\,i}{-1} = \mathbf{-3i \pm \sqrt{10}\,i}$

B. Determina per quali valori del parametro k l'equazione: $\mathbf{2k\,x^2 + (k^2-6)x - 3k = 0}$

- *a.* *ha soluzioni reali*
- *b.* *ha una sola soluzione*
- *c.* *ha due soluzioni reali e coincidenti*
- *d.* *ha due radici la cui somma è* -1
- *e.* *ha due radici reali e opposte*
- *f.* *ha una radice uguale a* 1
- *g.* *ha due radici, la somma dei cui reciproci è* 1

<u>*Soluzione*</u>

$2k\,x^2 + (k^2-6)x - 3k = 0$

$A = 2k$	$B = k^2 - 6$	$C = -3k$

a. $\Delta = (k^2-6)^2 - 4 \cdot 2k \cdot (-3k) = k^4 + 36 - 12k^2 + 24k^2 = k^4 + 36 + 12k^2 = (k^2+6)^2$
$\Delta \geq 0$: $\quad (k^2+6)^2 \geq 0 \quad \forall k \in R$. *Pertanto, l'equazione ha soluzioni reali per qualsiasi valore di k.*

b. *Per* $\mathbf{k = 0}$ *l'equazione diventa di I grado, pertanto ammette una sola soluzione* $x = 0$.
Infatti: $2 \cdot 0\,x^2 + (0^2 - 6)x - 3 \cdot 0 = 0$; $\quad -6x = 0$; $\quad x = 0$.

c. *l'equazione ha due radici reali e coincidenti se il discriminante è nullo.*
$\mathbf{\Delta = 0}$: $\quad (k^2-6)^2 - 4 \cdot 2k \cdot (-3k) = 0\,;$ $\quad k^4 + 36 - 12k^2 + 24k^2 = 0\,;$ $\quad k^4 + 36 + 12k^2 = 0\,;$
$(k^2+6)^2 = 0\,;$ $\quad k^2 + 6 = 0\,;$ $\quad \nexists\, k \in R\,.$ *Pertanto l'equazione non ha mai radici reali e coincidenti.*

d. $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -1}$: $\quad -\frac{b}{a} = -1\,;$ $\quad -\frac{k^2-6}{2k} = -1\,;$ $\quad k^2 - 6 = 2k\,;$ $\quad k^2 - 2k - 6 = 0$
$\frac{\Delta}{4} = 1 + 6 = 7\,;$ $\quad k_{1,2} = \mathbf{1 \mp \sqrt{7}}$

e. $\boldsymbol{x_1 = -x_2}$: $\quad b = 0\,;$ $\quad k^2 - 6 = 0\,;$ $\quad k^2 = 6\,;$ $\quad \boldsymbol{k = \mp\sqrt{6}}$

f. $\boldsymbol{x_1 = 1}$: $\quad 2k \cdot 1^2 + (k^2-6) \cdot 1 - 3k = 0\,;$ $\quad 2k + k^2 - 6 - 3k = 0\,;$ $\quad k^2 - k - 6 = 0\,;$

$$\Delta = 1 + 24 = 25\,; \qquad k_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \mp 5}{2} = \begin{array}{l} k_1 = \frac{1-5}{2} = \mathbf{-2} \\ k_1 = \frac{1+5}{2} = \mathbf{+3} \end{array}$$

g. *ha due radici, la somma dei cui reciproci è 1*

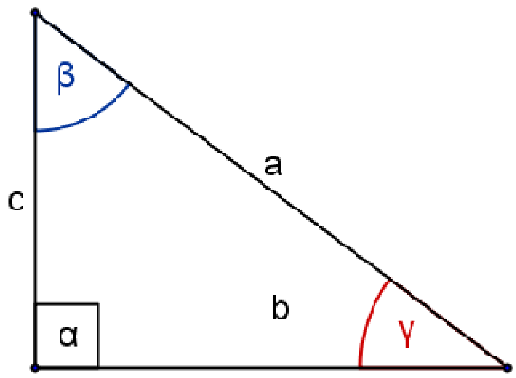
$$\boldsymbol{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1}\,; \qquad \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = 1\,; \qquad -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1\,; \qquad -\frac{b}{c} = 1\,; \qquad -\frac{k^2-6}{-3k} = 1\,;$$

$$\frac{k^2-6}{3k} = 1\,; \quad k^2 - 6 = 3k\,; \qquad k^2 - 3k - 6 = 0\,;$$

$$\Delta = 9 + 24 = 33\,; \qquad k_{1,2} = \frac{3 \mp \sqrt{33}}{2} = \boldsymbol{\frac{3 \mp \sqrt{33}}{2}}$$

D. In un triangolo rettangolo, un cateto misura 7 cm in più dell'altro cateto e l'ipotenusa 14 cm in meno della somma dei due cateti. Determina:

c. la lunghezza dei tre lati
d. l'ampiezza dei suoi angoli.



Soluzione a

Poniamo il cateto $b = x \quad \Rightarrow \quad$ *il cateto* $c = x + 7$

mentre l'ipotenusa $a = x + x + 7 - 14 = 2x - 7.$

Essendo x la misura di una lunghezza, dovrà essere $x > 0.$

Applicando il Teorema di Pitagora si ha:

$a^2 = b^2 + c^2\,;$ $\qquad (2x-7)^2 = x^2 + (x+7)^2\,;$

$4x^2 + 49 - 28x = x^2 + x^2 + 49 + 14x\,;$

$$2x^2 - 42x = 0\,; \qquad x \cdot (2x - 42) = 0\,; \qquad \begin{array}{c} x = 0 \\ 2x - 42 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x = 0 \\ x = 21 \end{array}$$

La soluzione $x = 0$ *, ovviamente, non è accettabile.*

Pertanto: $b = 21\ cm \qquad c = 28\ cm \qquad a = 35\ cm.$

Il perimetro del triangolo è $2p = a + b + c = (21 + 28 + 35)cm = 84\ cm\,.$

Soluzione b

Applicando la formula della tangente di un angolo acuto si ha:

$$tg\ \beta = \frac{b}{c}\,; \qquad tg\ \beta = \frac{21}{28}\,; \qquad \beta = 36{,}87° = 36°\,52^{I}\,12^{II}$$

$\gamma = 90° - \beta = 90° - 36°\,52^{I}\,12^{II} = 53°\,7^{I}\,48^{II}\,.$

Mentre, ovviamente, $\alpha = 90°\,.$

C. Effettua la discussione della seguente equazione letterale intera: $(a-3)x^2+2(a-4)x-4=0$

Soluzione

$(a-3)x^2+2(a-4)x-4=0$

$A=a-3$	$B=2(k-4)$	$C=-4$

$A=0$ *(Equazione di I grado)* $\Rightarrow$ $a=3$ $\Rightarrow$ $-2x-4=0\,;$ $x=-2$

$B=0$ *(Equazione Pura)* $\Rightarrow$ $a=4$ $\Rightarrow$ $x^2-4=0\,;$ $x^2=4\,;$ $x_{1,2}=\mp 2$

$C=0$ *(Equazione Spuria)* $\Rightarrow$ $-4=0$ *per nessun valore di a .*

$$\frac{\Delta}{4}=(a-4)^2+4(a-3)=a^2+16-8a+4a-12=a^2+4-4a=(a-2)^2$$

$\frac{\Delta}{4}=0;$ $(a-2)^2=0\,;$ $a-2=0\,;$ $a=2$ $\Rightarrow$ $-x^2-4x-4=0\,;$ $-(x+2)^2=0\,;$ $x=-2$ *doppia*

$\Delta<0$ $(a-1)^2<0$ per nessun valore di a.

$\Delta>0;$ $(a-2)^2>0\,;$ $a-2\neq 0\,;$ $a\neq 2$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\mp\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}=\frac{-(a-4)\mp\sqrt{(a-2)^2}}{a-3}=\frac{-a+4\mp(a-2)}{a-3}=$$

$$= \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-a+4-a+2}{a-3}=\dfrac{-2a+6}{a-3}=\dfrac{-2(a-3)}{a-3}=-2 \\ x_2=\dfrac{-a+4+a-2}{a-3}=\dfrac{2}{a-3} \end{array}$$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=3$	*Equazione di I° grado*	$x=-2$
$a=4$	*Equazione Pura*	$x_{1,2}=\mp 2$
$\nexists\, a\in R$	*Equazione Spuria*	
$a=2$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_{1,2}=-2$
$\nexists\, a\in R$	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	
$a\neq 3 \quad \wedge \quad a\neq 2 \quad \wedge \quad a\neq 4$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=-2 \quad \wedge \quad x_2=\frac{2}{a-3}$