Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2012-2013

Prova di Matematica : Frazioni algebriche + Criteri di congruenza dei triangoli

22.02.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: **1 B**

A. Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

1. $16x^{12}+16x^9y^2+4x^6y^4$
2. $4x^6-2bx^3-6b^2$
3. $1-4x^2+4ax^2+4ax+a$
4. $5a^3-31a^2+32a+48$
5. $4x^4-\frac{16}{3}x^3y+\frac{16}{9}x^2y^2$
6. $x^2y^3-8x^2+y^5-8y^2$
7. $(2x+y)^2-4x^2-9y^2+12xy$
8. $(3x+y)^2+3ax+ay-3x^2-xy$
9. x^9+y^9
10. $6x^4+31x^3+39x^2-4x-12$

B. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

1. $\dfrac{9x^2-24x+16}{3x^2y^3-4xy^3}$	☐ $\frac{3x-4}{x}$	☐ $\frac{3x-4}{y^3}$	☐ $\frac{3x-4}{xy^3}$	☐ $\frac{3x-4}{xy^2}$
2. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+2x-4y-2xy}$	☐ $\frac{x-5}{x+2}$	☐ $\frac{x-5}{x-2y}$	☐ $\frac{x-5}{x+2y}$	☐ $\frac{x-5}{x-y}$
3. $\dfrac{a^2-4ab+4b^2-(a-b)^2}{9a^2-12ab+4b^2}$	☐ $\frac{b}{2b-3a}$	☐ $\frac{b\,(3b-2a)}{(3a-2b)^2}$	☐ $\frac{b}{b-3a}$	☐ $\frac{b}{2b-a}$
4. $\dfrac{2a+1-2a^{2n+1}-a^{2n}}{4a^2+4a+1-4a^{n+2}-4a^{n+1}-a^n}$	☐ $\frac{1-a^n}{2a+1}$	☐ $\frac{1+a^n}{a+1}$	☐ $\frac{1+a^n}{2a-1}$	☐ $\frac{1+a^n}{2a+1}$

C. Semplifica le seguenti espressioni contenenti frazioni algebriche:

1. $\dfrac{b^2-2b-3}{b^2-15+2b}\cdot\dfrac{b^2-4b+4}{b+2}:\dfrac{b^2-b-2}{b^2+10+7b}$
2. $\dfrac{2}{a}+\dfrac{a^2+a}{a^2+4a+3}+\dfrac{4a+3}{a^2+3a}$
3. $\left(\dfrac{a}{a+3}+\dfrac{4}{a+3}+a\right)\cdot\left[\left(\dfrac{2}{a+1}+a-1\right)^2:\left(\dfrac{a^2+2a-3}{2+3a+a^2}\right)^{-2}\right]:\left(a+\dfrac{2}{a+1}-1\right)^2$

D. Dato il triangolo ABC isoscele sulla base BC, traccia l'altezza AH e su di essa considera un punto Q qualsiasi.

a. Dimostra che il triangolo BQC è isoscele.

b. Prolunga QC, dalla parte di Q, fino ad incontrare AB in R e prolunga BQ fino ad incontrare AC in S. Dimostra che $BR\cong CS$.

Valutazione	Esercizio	A	B	C	D	Totale
	Punti	25	16	24	15	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

A. Scomponi in fattori i seguenti polinomi:

1. $16x^{12}+16x^9y^2+4x^6y^4 \;=\; 4x^6(4x^6+4x^3y^2+y^4) \;=\; 4x^6(2x^3+y^2)^2$.

2. $4x^6-2bx^3-6b^2 = 2(2x^6-bx^3-3b^2)$

$= 2(2x^6+2bx^3-3bx^3-3b^2) =$

$p=2\cdot(-3)=-6$		$s=-1$
$+2$	-3	-1

$= 2[2x^3(x^3+b)-3b(x^3+b)] =$

$= 2(x^3+b)(2x^3-3b)$.

3. $1-4x^2+4ax^2+4ax+a \;=\; (1+2x)(1-2x)+a(4x^2+4x+1) \;=\; (1+2x)(1-2x)+a(2x+1)^2 \;=$
$=\; (1+2x)[(1-2x)+a(2x+1)] \;=\; (1+2x)(1-2x+2ax+a)$.

4. $5a^3-31a^2+32a+48 =$ $\qquad D_{48}=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm8;\pm12;\pm16;\pm24;\pm48\}$

$=\; (a-3)(5a^2-16a-16) \;=$

	5	−31	+32	+48
+3		+15	−48	−48
	5	−16	−16	=

$=\; (a-3)(a-4)(5a+4)$.

	5	−16	−16
+4		+20	+16
	5	+4	=

5. $4x^4-\frac{16}{3}x^3y+\frac{16}{9}x^2y^2 \;=\; \frac{36x^4-48x^3y+16x^2y^2}{9} \;=\; \frac{4x^2(9x^2-12xy+4y^2)}{9} \;=\; \frac{4x^2}{9}(3x-2y)^2$.

6. $x^2y^3-8x^2+y^5-8y^2 \;=\; x^2(y^3-8)+y^2(y^3-8) \;=\; (y^3-8)(x^2+y^2) \;=$
$=\; (y-2)(y^2+2y+4)(x^2+y^2)$.

7. $(2x+y)^2-4x^2-9y^2+12xy \;=\; 4x^2+y^2+4xy-4x^2-9y^2+12xy \;=\; -8y^2+16xy =$
$=\; 8y(2x-y)$.

8. $(3x+y)^2+3ax+ay-3x^2-xy \;=\; (3x+y)^2+a(3x+y)-x(3x+y) \;=$
$=\; (3x+y)[(3x+y)+a-x] \;=\; (3x+y)(2x+y+a)$.

9. $x^9+y^9 \;=\; (x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6) \;=\; (x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.

10. $6x^4+31x^3+39x^2-4x-12 =$ $\qquad D_{12}=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6\pm12\}$

$= (x+2)(6x^3+19x^2+x-6) =$

	+6	+31	+39	−4	−12
−2		−12	−38	−2	+12
	+6	+19	+1	−6	=

$(x+2)(x+3)(6x^2+x-2) \;=$

	+6	+19	+1	−6
−3		−18	−3	+6
	+6	+1	−2	=

$=\; (x+2)(x+3)(6x^2+x-2) \;=\; (x+2)(x+3)(6x^2-3x+4x-2) \;=$

$=\; (x+2)(x+3)[3x(2x-1)+2(2x-1)] \;=\; (x+2)(x+3)(2x-1)(3x+2)$.

B. Semplifica le seguenti frazioni algebriche:

1. $\dfrac{9x^2-24x+16}{3x^2y^3-4xy^3}=$ $\qquad C.E.:\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0\ \wedge\ x\neq\dfrac{4}{3}$

$$=\frac{(3x-4)^2}{xy^3(3x-4)}=\frac{3x-4}{xy^3}\ .$$

2. $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+2x-4y-2xy}=\dfrac{(x+2)(x-5)}{x(x+2)-2y(2+x)}=\dfrac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x-2y)}=\dfrac{x-5}{x-2y}$ $\qquad C.E.:\ x\neq -2\ \wedge\ x\neq 2y$

3. $\dfrac{a^2-4ab+4b^2-(a-b)^2}{9a^2-12ab+4b^2}=\dfrac{(a-2b)^2-(a-b)^2}{(3a-2b)^2}=$ $\qquad C.E.:\ a\neq\dfrac{2}{3}b$

$$=\frac{(a-2b+a-b)(a-2b-a+b)}{(3a-2b)^2}=\frac{-b\,(2a-3b)}{(3a-2b)^2}=\frac{b\,(3b-2a)}{(3a-2b)^2}\ .$$

4. $\dfrac{2a+1-2a^{2n+1}-a^{2n}}{4a^2+4a+1-4a^{n+2}-4a^{n+1}-a^n}=$ $\qquad C.E.:\ \begin{cases} a\neq-\dfrac{1}{2}\ \wedge\ a\neq 1 & se\ n\ è\ dispari\\ a\neq-\dfrac{1}{2}\ \wedge\ a\neq\pm 1 & se\ n\ è\ pari\end{cases}$

$$=\frac{(2a+1)-a^{2n}(2a+1)}{(4a^2+4a+1)-a^n(4a^2+4a+1)}=\frac{(2a+1)(1-a^{2n})}{(4a^2+4a+1)(1-a^n)}=\frac{(2a+1)(1+a^n)(1-a^n)}{(2a+1)^2(1-a^n)}=\frac{1+a^n}{2a+1}\ .$$

C. Semplifica le seguenti espressioni contenenti frazioni algebriche:

1. $\dfrac{b^2-2b-3}{b^2-15+2b}\cdot\dfrac{b^2-4b+4}{b+2}:\dfrac{b^2-b-2}{b^2+10+7b}=$ $\qquad C.E.:\ b\neq 3\ \wedge\ b\neq -5\ \wedge\ b\neq\pm 2\ \wedge\ b\neq -1$

$$=\frac{b^2-2b-3}{b^2-15+2b}\cdot\frac{b^2-4b+4}{b+2}\cdot\frac{b^2+10+7b}{b^2-b-2}=$$

$$=\frac{(b-3)(b+1)}{(b-3)(b+5)}\cdot\frac{(b-2)^2}{b+2}\cdot\frac{(b+2)(b+5)}{(b-2)(b+1)}=b-2\ .$$

2. $\dfrac{2}{a}+\dfrac{a^2+a}{a^2+4a+3}+\dfrac{4a+3}{a^2+3a}=$ $\qquad C.E.:\ a\neq 0\ \wedge\ a\neq -1\ \wedge\ a\neq -3$

$$=\frac{2}{a}+\frac{a(a+1)}{(a+1)(a+3)}+\frac{4a+3}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{2}{a}+\frac{a}{a+3}+\frac{4a+3}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{2(a+3)+a^2+4a+3}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{2a+6+a^2+4a+3}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{a^2+6a+9}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{(a+3)^2}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{a+3}{a}\ .$$

3. $\left(\frac{a}{a+3}+\frac{4}{a+3}+a\right)\cdot\left[\left(\frac{2}{a+1}+a-1\right)^2:\left(\frac{a^2+2a-3}{2+3a+a^2}\right)^{-2}\right]:\left(a+\frac{2}{a+1}-1\right)^2 =$

$C.E.:\ a\neq -3\ \wedge\ a\neq -1\ \wedge\ a\neq -2\ \wedge\ a\neq -1$

$$= \frac{a+4+a(a+3)}{a+3}\cdot\left\{\left(\frac{2+(a+1)(a-1)}{a+1}\right)^2\cdot\left[\frac{(a-1)(a+3)}{(a+1)(a+2)}\right]^2\right\}:\left[\frac{a(a+1)+2-(a+1)}{a+1}\right]^2 =$$

$$= \frac{a+4+a^2+3a}{a+3}\cdot\left\{\left(\frac{2+a^2-1}{a+1}\right)^2\cdot\frac{(a-1)^2(a+3)^2}{(a+1)^2(a+2)^2}\right\}:\left[\frac{a^2+a+2-a-1}{a+1}\right]^2 =$$

$$= \frac{a^2+4a+4}{a+3}\cdot\left\{\left(\frac{a^2+1}{a+1}\right)^2\cdot\frac{(a-1)^2(a+3)^2}{(a+1)^2(a+2)^2}\right\}:\left[\frac{a^2+1}{a+1}\right]^2 =$$

$$= \frac{(a+2)^2}{a+3}\cdot\left\{\frac{(a^2+1)^2}{(a+1)^2}\cdot\frac{(a-1)^2(a+3)^2}{(a+1)^2(a+2)^2}\right\}:\frac{(a^2+1)^2}{(a+1)^2} =$$

$$= \frac{(a+2)^2}{a+3}\cdot\frac{(a^2+1)^2(a-1)^2(a+3)^2}{(a+2)^2(a+1)^4}\cdot\frac{(a+1)^2}{(a^2+1)^2} =$$

$$= \frac{(a-1)^2(a+3)}{(a+1)^2}\ .$$

Dato il triangolo ABC isoscele sulla base BC, traccia l'altezza AH e su di essa considera un punto Q qualsiasi.

c. Dimostra che il triangolo BQC è isoscele.

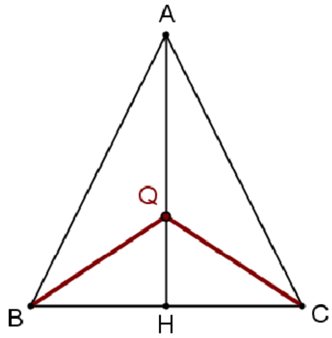
d. Prolunga QC, dalla parte di Q, fino ad incontrare AB in R e BQ fino ad incontrare AC in S. Dimostra che $BR\cong CS$.

IPOTESI		*TESI*
ABC è un triangolo isoscele sulla base BC AH è l'altezza relativa alla base BC	$\Rightarrow$	1. BQC è isoscele 2. $BR\cong CS$

Dimostrazione 1

Per dimostrare che il triangolo BQC è isoscele, è sufficiente dimostrare che i triangoli BHQ e CHQ sono congruenti.

I triangoli BHQ e CHQ sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli.



Infatti:

$B\hat{H}Q\cong C\hat{H}Q$ perché angoli retti

$BH\cong CH$ perchè l'altezza AH del triangolo isoscele ABC è anche mediana

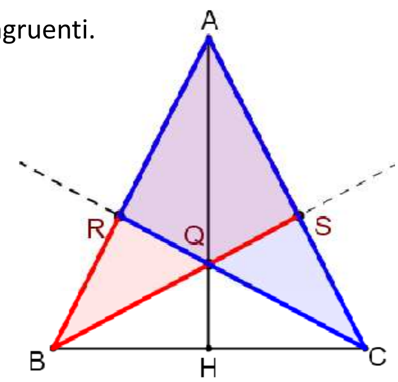
QH è un lato in comune ai due triangoli

Si deduce quindi, che $BQ\cong CQ$, e che il triangolo BQC è isoscele.

Dimostrazione 2

Per dimostrare che $BR\cong CS$, è sufficiente dimostrare che i triangoli ABR e ACS sono congruenti.

I triangoli BHQ e CHQ sono congruenti per il II criterio di congruenza dei triangoli.



Infatti:

$\hat{A}$ è un angolo in comune ai due triangoli

$AB\cong AC$ perchè il triangolo ABC è isoscele

$A\hat{B}R\cong A\hat{C}S$ perchè differenza di angoli congruenti.

Infatti: $A\hat{B}R\cong\hat{B}-C\hat{B}R\cong\hat{C}-B\hat{C}S\cong A\hat{C}S$

Si deduce quindi, che $BR\cong CS$.