Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Equazioni nel campo complesso + Geometria 1

29.02.2012

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$x^2+3\,x+4=0$	$x^2+2\sqrt{5}\,i\,x+11=0$
$x^6-25x^3-54=0$	$x^3—4x^2+8x-8=0$
$2x^6+32x^2=0$	$x^8+13x^4+36=0$
$x^5+4x^4+9x^3+16x^2+18x+12=0$	$x^2-6i=0$

2. Semplifica la seguente espressione:

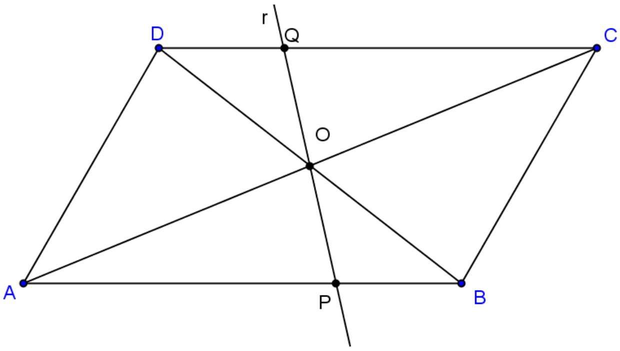
$$\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i^3\right)+\frac{i^5(2-i)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i\right)^2}-(1+2i)^3 : i^{1001}$$

3. A un giardiniere viene richiesto di predisporre, in un'area giardino a forma di quadrilatero, un'aiuola circolare che risulti inscritta nell'area stessa. Quale tra le seguenti verifiche il giardiniere deve eseguire sul quadrilatero per stabilire se è possibile realizzare l'aiuola? *(Modello INVALSI)*

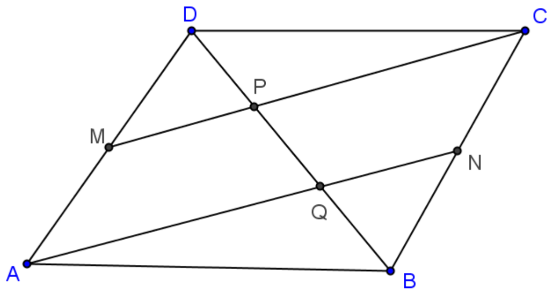
   se è un rettangolo
   se è un rombo o un quadrato
   se è un parallelepipedo
   se è un trapezio o un parallelogrammo
   se la somma delle misure di due lati opposti è uguale alla somma delle misure degli altri due lati.

4. Dimostra che, in un trapezio isoscele in cui i lati obliqui sono congruenti alla base minore, le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

5. Sia O il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogramma ABCD. Traccia una retta r passante per O e indica con P il suo punto di intersezione con il lato AB e con Q il suo punto di intersezione con il lato CD. Dimostra che O è il punto medio dei PQ.



6. In un parallelogramma ABCD, sia M il punto medio di AD ed N il punto medio di BC. Dimostra che:
   a. AN E MC sono paralleli
   b. i segmenti AN e CM dividono la diagonale BD in tre segmenti congruenti.



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
	Punti	40	8	5	7	10	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$\boldsymbol{x^2+3\,x+4=0}$ $\quad\quad$ $\Delta= 9-16=-7$ $\quad\quad$ $x_{1,2} \;=\; \boldsymbol{-3\mp\sqrt{7}\,i}$

$\boldsymbol{x^2+2\sqrt{5}\,i\,x+11=0}$

$\frac{\Delta}{4}=5i^2-11=-5-11=-16$ $\quad\quad$ $x_{1,2} \;=\; -\sqrt{5}\,i\mp\sqrt{-16} \;=\; -\sqrt{5}\,i\mp 4\,i \;=\; \boldsymbol{\left(-\sqrt{5}\;\mp 4\right)i}$

$\boldsymbol{x^6-25x^3-54=0}$

Si pone $x^3=z$ $\quad\Rightarrow\quad$ $z^2-25z-54=0$

$\Delta= 625+216=841$ $\quad\quad$ $z_{1,2} \;=\; \frac{25\mp 29}{2} \;=$ $\quad$ $z_1=-2$ $\quad$ $x^3=-2$; $\quad$ $z_2=27$ $\quad$ $x^3=+27$

$x^3=-2\,;\quad x^3+2=0\,;\quad \left(x+\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2}\right)=0$ $\quad$ $x+\sqrt[3]{2}=0$ $\quad$ $x_1=\boldsymbol{-\sqrt[3]{2}}$; $\quad$ $x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}=0$ $\quad$ $x_{2,3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt[3]{2}\mp\sqrt[6]{108}\,i}{2}}$

$x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}=0\,;\quad\quad \Delta=\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-4\sqrt[3]{4} \;=\; \sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4} \;=\; -3\sqrt[3]{4};$

$$x_{2,3}=\frac{\sqrt[3]{2}\mp\sqrt{-3\sqrt[3]{4}}}{2}=\frac{\sqrt[3]{2}\mp\sqrt{3\sqrt[3]{4}}\;i}{2}=\frac{\sqrt[3]{2}\mp\sqrt{\sqrt[3]{3^3 4}}\;i}{2}=\frac{\sqrt[3]{2}\mp\sqrt[6]{108}\;i}{2}$$

$x^3=27\,;\quad\quad x^3-27=0;\quad\quad (x-3)(x^2+3x+9)=0$ $\quad$ $x-3=0$ $\quad$ $x_4=\boldsymbol{+3}$; $\quad$ $x^2+3x+9=0$ $\quad$ $x_{5,6}=\boldsymbol{\frac{-3\mp\sqrt{3}\,i}{2}}$

$x^2+3x+9=0\,;\quad\quad \Delta= 9-36=-27\,;\quad\quad x_{5,6}=\frac{-3\mp\sqrt{-27}}{2}=\frac{-3\mp\sqrt{3}\,i}{2}$

$\boldsymbol{x^3 - 4x^2+8x-8=0}$

$(x-2)(x^2-2x+4)=0$ $\quad$ $x-2=0$ $\quad$ $x_1=\boldsymbol{+2}$; $\quad$ $x^2-2x+4=0$ $\quad$ $x_{2,3}=\boldsymbol{1\mp 3i}$

$\frac{\Delta}{4}=1-4=-3\,;\quad x_{2,3}=1\mp\sqrt{-3}=1\mp 3i$

$\boldsymbol{2x^6 + 32x^2 = 0}$

$2x^2 \cdot (x^4 + 16) = 0\,;$

$2x^2 \cdot [(x^4 + 16 + 8x^2) - 8x^2] = 0\,;$

$2x^2 \cdot [(x^2 + 4)^2 - 8x^2] = 0\,;$

$2x^2 \cdot \left[(x^2 + 4) + \sqrt{8}x\right]\left[(x^2 + 4) - \sqrt{8}x\right] = 0\,;$ $\qquad$ $2x^2 = 0$; $\quad x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0$; $\quad x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0$

$2x^2 = 0; \qquad x_{1,2} = \mathbf{0}$

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 0 \qquad \dfrac{\Delta}{4} = 2 - 4 = -2 \qquad x_{3,4} = -\sqrt{2} \mp \sqrt{-2} = \boldsymbol{-\sqrt{2} \mp \sqrt{2}\, i}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = 0 \qquad \dfrac{\Delta}{4} = 2 - 4 = -2 \qquad x_{5,6} = +\sqrt{2} \mp \sqrt{-2} = \boldsymbol{+\sqrt{2} \mp \sqrt{2}\, i}$

$\boldsymbol{x^8 + 13x^4 + 36 = 0}$

Si pone $x^4 = z \qquad \Rightarrow \qquad z^2 + 13z + 36 = 0$

$\Delta = 169 - 144 = 25 \qquad z_{1,2} = \dfrac{-13 \mp 5}{2} = \begin{cases} z_1 = -9 & x^4 = -9 \\ z_2 = -4 & x^4 = -4 \end{cases}$

$x^4 = -9\,; \qquad x^4 + 9 = 0\,; \qquad (x^4 + 9 + 6x^2) - 6x^2 = 0\,; \qquad (x^2 + 3)^2 - 6x^2 = 0\,;$

$\left[(x^2 + 3) + \sqrt{6}x\right]\left[(x^2 + 3) - \sqrt{6}x\right] = 0\,;$ $\qquad x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0$; $\quad x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0$

$x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0 \qquad \Delta = 6 - 12 = -6 \qquad x_{3,4} = -\sqrt{6} \mp \sqrt{-6} = \boldsymbol{-\sqrt{6} \mp \sqrt{6}\, i}$

$x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0 \qquad \Delta = 6 - 12 = -6 \qquad x_{3,4} = +\sqrt{6} \mp \sqrt{-6} = \boldsymbol{+\sqrt{6} \mp \sqrt{6}\, i}$

$x^4 = -4\,; \qquad x^4 + 4 = 0\,; \qquad (x^4 + 4 + 4x^2) - 4x^2 = 0\,; \qquad (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = 0\,;$

$[(x^2 + 2) + 2x]\,[(x^2 + 2) - 2x] = 0\,;$ $\qquad x^2 + 2x + 2 = 0$; $\quad x^2 - 2x + 2 = 0$

$x^2 + 2x + 2 = 0 \qquad \dfrac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 \qquad x_{5,6} = -1 \mp \sqrt{-1} = \boldsymbol{-1 \mp i}$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad \dfrac{\Delta}{4} = 1 - 2 = -1 \qquad x_{5,6} = +1 \mp \sqrt{-1} = \boldsymbol{+1 \mp i}$

$\boldsymbol{x^5 + 4x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 18x + 12 = 0}$

	1	4	9	16	18	12
-2		-2	-4	-10	-12	-12
	1	2	5	6	6	=

$(x+2)\ (x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 6) = 0$

$(x+2)\ (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 6x + 6) = 0$

$(x+2)\ [x^2(x^2 + 2x + 2) + 3(x^2 + 2x + 2)] = 0$

$(x+2)\ (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 3) = 0$

$x + 2 = 0 \qquad x_1 = \boldsymbol{-2}$

$x^2 + 3 = 0 \qquad x_{2,3} = \boldsymbol{\mp\sqrt{3}i}$

$x^2 + 2x + 2 = 0 \qquad x_{4,5} = \boldsymbol{-1 \mp i}$

$\boldsymbol{x^2 - 6i = 0}$; $\qquad x = \mp\sqrt{6i}$; $\qquad x = \mp\sqrt{6}\,\sqrt{i}$

Trasformiamo $\sqrt{i}$ nella forma normale di numero complesso: $a + b\,i$.

$\sqrt{i} = a + b\,i \qquad \Leftrightarrow \qquad (a + b\,i)^2 = i \qquad$ *cioè*: $\quad a^2 + b^2 i^2 + 2abi = i$

$a^2 - b^2 + 2abi = i$ Tale uguaglianza è vera se: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \mp b \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ -2b^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ b^2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\, i \\ b = \mp\sqrt{-\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\, i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = +b \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +b \\ 2b^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +b \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \mp\sqrt{\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Pertanto: $$\sqrt{i} = \left[\begin{array}{l} a + b\,i = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, i + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \cdot i = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, i - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a + b\,i = +\frac{\sqrt{2}}{2}\, i - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \cdot i = +\frac{\sqrt{2}}{2}\, i + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a + b\,i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \\ a + b\,i = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \\ \\ \sqrt{i} = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i \end{array}$$

Sostituendo: $\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$ in (*) si ha:

$$x = \mp\sqrt{6}\,\sqrt{i} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -\sqrt{6}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = +\dfrac{\sqrt{12}}{2} + \dfrac{\sqrt{12}}{2}\, i = +\dfrac{2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2}\, i = \boldsymbol{+\sqrt{3} + \sqrt{3}\, i} \\ x_2 = +\sqrt{6}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, i\right) = -\dfrac{\sqrt{12}}{2} - \dfrac{\sqrt{12}}{2}\, i = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{2}\, i = \boldsymbol{-\sqrt{3} - \sqrt{3}\, i} \end{array}$$

Sostituendo: $\sqrt{i} = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$ in (*) si ottengono di nuovo le soluzioni precedenti.

2. Semplifica la seguente espressione:

$$\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i^3\right)+\frac{i^5(2-i)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i\right)^2}-(1+2i)^3:i^{1001} =$$

$$= \left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)+\frac{i(2-i)}{3+3i^2+6i}-(1+8i^3+6i+12i^2):i =$$

$$= \frac{9}{25}-\frac{16}{25}i^2+\frac{2i-i^2}{3-3+6i}-(1-8i+6i-12):i =$$

$$= \frac{9}{25}+\frac{16}{25}+\frac{2i-i^2}{6i}-(-11-2i):i =$$

$$= 1+\frac{2i+1}{6i}+\frac{11+2i}{i} =$$

$$= \frac{6i+2i+1+66+12i}{6i} =$$

$$= \frac{67+20i}{6i} =$$

$$= \frac{67+20i}{6i}\cdot\frac{i}{i} =$$

$$= \frac{67i+20i^2}{6i^2} =$$

$$= \frac{67i-20}{-6} =$$

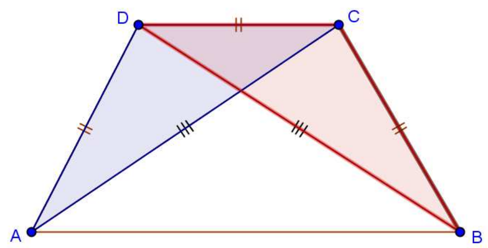
$$= \frac{20-67i}{6}$$

3. A un giardiniere viene richiesto di predisporre, in un'area giardino a forma di quadrilatero, un'aiuola circolare che risulti inscritta nell'area stessa. Quale tra le seguenti verifiche il giardiniere deve eseguire sul quadrilatero per stabilire se è possibile realizzare l'aiuola? *(Modello INVALSI)*

se la somma delle misure di due lati opposti è uguale alla somma delle misure degli altri due lati.

4. Dimostra che, in un trapezio isoscele in cui i lati obliqui sono congruenti alla base minore, le diagonali sono bisettrici degli angoli adiacenti alla base maggiore.

Ipotesi		*Tesi*
$ABCD$ è un trapezio isoscele $AD \cong DC \cong BC$	$\Rightarrow$	$C\hat{A}D \cong B\hat{A}C$ $A\hat{B}D \cong C\hat{B}D$

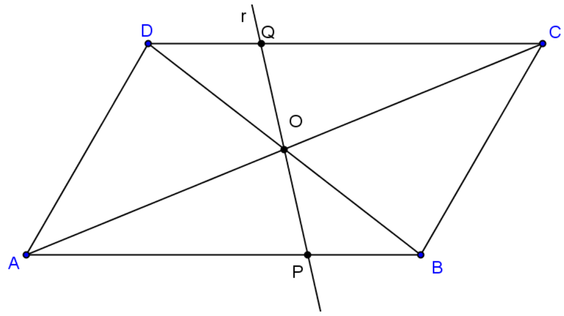


Dimostrazione

$C\hat{A}D \cong A\hat{C}D$ perché ACD è un triangolo isoscele.
$A\hat{C}D \cong C\hat{A}B$ perché angoli alterni interni
Per la proprietà transitiva si ha: $C\hat{A}D \cong C\hat{A}B$
In modo analogo si dimostra l'altra parte della tesi.

5. Sia O il punto di intersezione delle diagonali di un parallelogramma ABCD. Traccia una retta r passante per O e indica con P il suo punto di intersezione con il lato AB e con Q il suo punto di intersezione con il lato CD. Dimostra che O è il punto medio dei PQ.

Ipotesi		*Tesi*
$ABCD$ è un parallelogramma *O è il punto di incontro delle diagonali*	$\Rightarrow$	$OP \cong OQ$



Dimostrazione

I triangoli $ODQ \cong OBP$ *per il II C.C.T. Infatti:*

$D\hat{O}Q \cong P\hat{O}B$ *perché opposti al vertice*

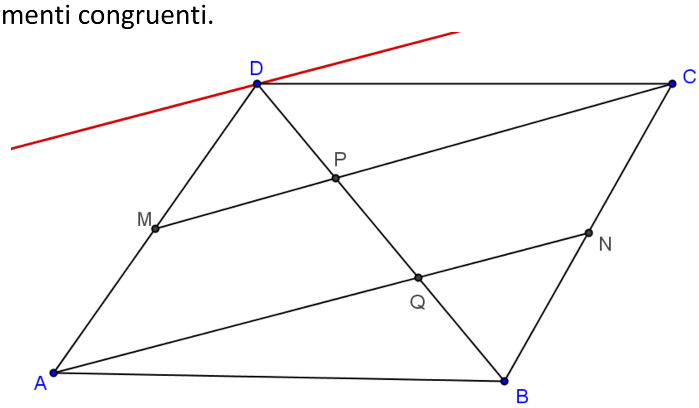
$OD \cong OB$ *perché le diagonali si incontrano nel loro punto medio*

$O\hat{D}Q \cong P\hat{B}O$ *perché alterni interni*

Pertanto si conclude che: $OP \cong OQ$.

6. In un parallelogramma ABCD, sia M il punto medio di AD ed N il punto medio di BC. Dimostra che:
   a. AN E MC sono paralleli
   b. i segmenti AN e CM dividono la diagonale BD in tre segmenti congruenti.

Ipotesi		*Tesi*
$ABCD$ è un parallelogramma $AM \cong MD$ $BN \cong NC$	$\Rightarrow$	$AN \parallel MC$ $DP \cong PQ \cong QB$



Dimostrazione

Ricordando il teorema: "Se un quadrilatero ha due lati opposti congruenti e paralleli, allora è un parallelogramma"; si ha che: $ANCM$ *è un parallelogramma. Infatti, per ipotesi* $AM \cong MD$ *e* $AM \parallel NC$.

Essendo $ANCM$ *è un parallelogramma, si conclude che:* $AN \parallel MC$.

Tracciando per il punto P la retta r parallela ad AN e MC, e applicando a queste tre rette il teorema di Talete 1, si ha che: $MD \cong AD \quad \Rightarrow \quad DP \cong PQ$.

Tracciando per il punto B la retta s parallela ad AN e MC, e applicando a queste tre rette il teorema di Talete 1, si ha che: $CN \cong NB \quad \Rightarrow \quad PQ \cong QB$.

Applicando la proprietà transitiva si ha la tesi:

$DP \cong PQ \cong QB$.