Prova di Matematica : Sistemi di equazioni e problemi di I grado

10.10.2011
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 2 C

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$$\begin{cases} 12x - 18y + 3 = 0 \\ 15y - 10x = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases}$$

2. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con un metodo a tua scelta:

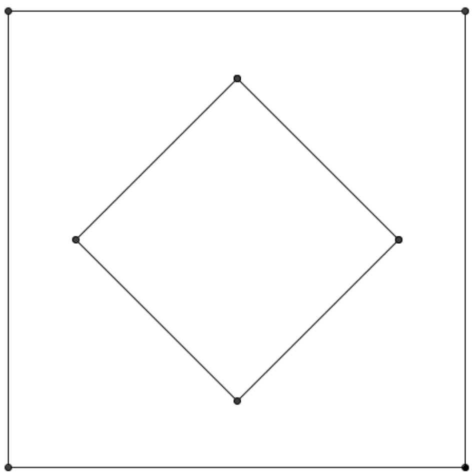
$$\begin{cases} 3x - y = 10 - 2z \\ 4z - y = 17 - 6x \\ x + 5 = 2z - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2} + y\right)(1 - x) + \frac{x^2}{2}\right] = 1 - \frac{xy}{2} \\ \frac{1}{4}(3x - 11) + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x + y) - (x - y + 5) = a \\ ax + 2ay + a = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{k - x}{k^2 + k} + \frac{y - 2k}{k + 1} = -1 \\ \frac{x}{2} - y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x - 3}{y + 2} - \frac{y - 1}{x + 1} = \frac{2x^2 - y^2}{xy + y + 2x + 2} \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Un bibliotecario vuole disporre in ordine dei libri di storia sugli scaffali di una libreria. Se mette 8 libri su ogni scaffale, ne rimane vuoto uno; se invece mette 6 libri su ogni scaffale, riempie la libreria ma gli restano fuori 2 libri. Quanti libri deve sistemare il bibliotecario ?

4. In una città si è costruita una aiuola quadrata tenuta a prato con al centro una fontana, anch'essa quadrata, disposta come in figura. Per i contorni, sia interno sia esterno, sono stati usati 176 m di bordo in marmo. Per il contorno esterno però sono serviti 112 m in più che per il contorno interno. Quanti metri quadrati di prato ci sono nell'aiuola ?



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	Totale
	Punti	24 + 2	7 + 7 + 8 + 8 + 8	8	8	80

Punti	0 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35	36 - 40	41 - 45	46 - 50	51 - 55	56 - 60	61 - 65	66 - 70	71 - 75	76 - 80
Voto	2	2½	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

Soluzione

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$$\begin{cases} 12x - 18y + 3 = 0 \\ 15y - 10x = 5 \end{cases} \quad Il\ sistema\ \text{è}\ impossibile\ .$$

$$Infatti\ riducendo\ il\ sistema\ a\ forma\ normale \quad \begin{cases} 12x - 18y = -3 \\ -10x + 15y = 5 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a^I} = \frac{+12}{-10} = -\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{b}{b^I} = \frac{-18}{+15} = -\frac{6}{5}\right) \neq \left(\frac{c}{c^I} = \frac{-3}{+5} = -\frac{3}{5}\right)$$

<u>Metodo di sostituzione</u>

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{a^I} = \frac{2}{3}\right) \neq \left(\frac{b}{b^I} = \frac{1}{4}\right) \qquad Sistema\ determinato$$

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 6 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 3x - 4(2x - 6) = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 3x - 8x + 24 = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ -5x = -10 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 \cdot 2 - 6 \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +2 \\ y = -2 \end{cases}$$

<u>Metodo del confronto</u>

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 2x - 6 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 8x - 24 = 3x - 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ 8x - 3x = 24 - 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 5x = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2 \cdot 2 - 6 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +2 \\ y = -2 \end{cases}$$

<u>Metodo di riduzione</u>

$$\begin{matrix} 3 \cdot \\ 2 \cdot \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x - 3y = 18 & - \\ 6x - 8y = 28 & = \end{cases}$$

$$5y = -10\ ; \qquad y = -2$$

$$\begin{matrix} 4 \cdot \\ 1 \cdot \end{matrix} \begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x - 4y = 24 & - \\ 3x - 4y = 14 & = \end{cases}$$

$$5x \quad = 10\ ; \qquad x = 2$$

$$\begin{cases} x = +2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Metodo di Cramer

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - 4 = 14 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) = -8 + 3 = -5$$

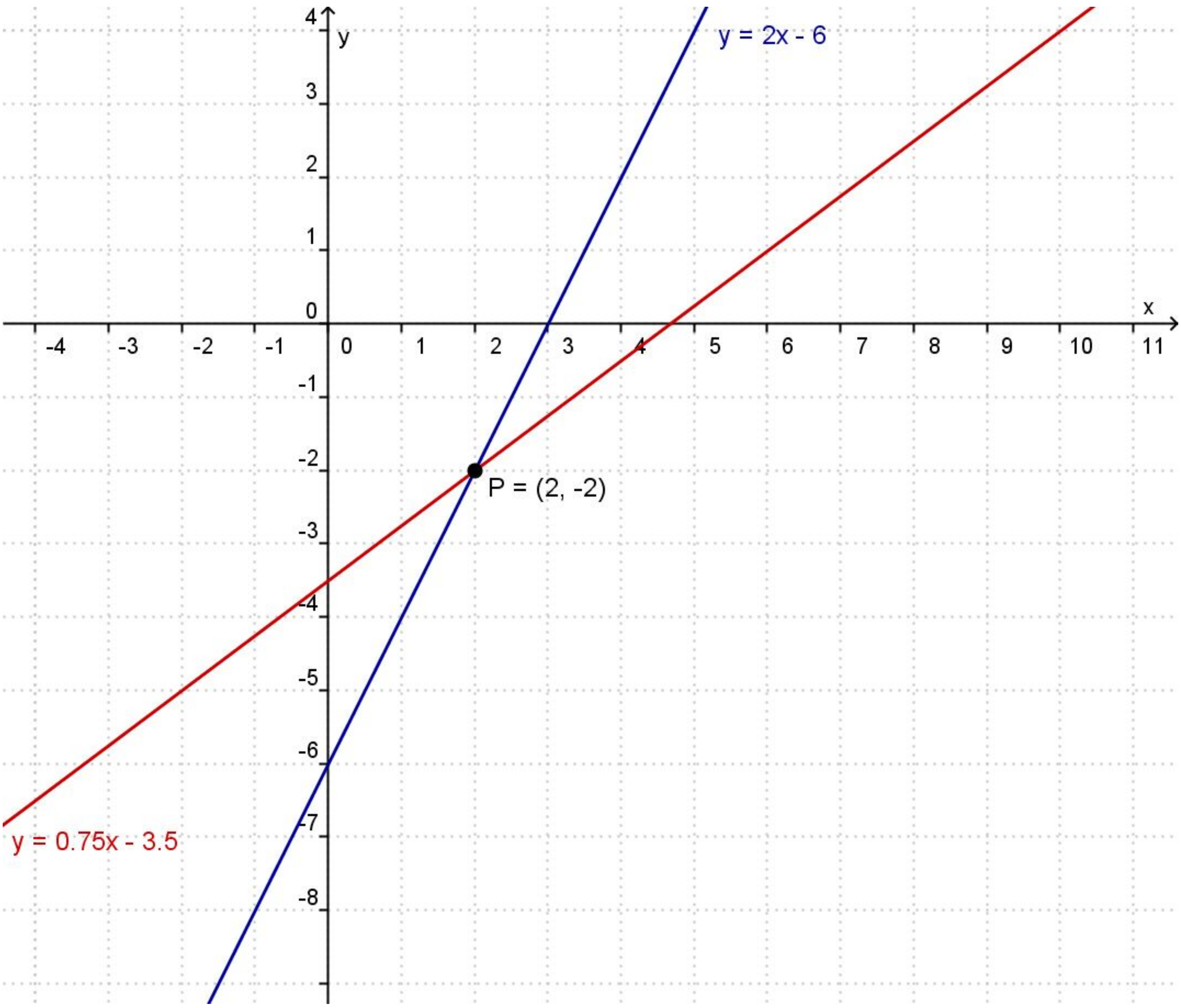
$$Dx = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 14 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-4) - 14 \cdot (-1) = -24 + 14 = -10$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 6 = 28 - 18 = +10$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-10}{-5} = +2 \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{+10}{-5} = -2 \end{cases}$$

Metodo di Grafico

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 3x - 4 = 14 \end{cases}$$



2. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con un metodo a tua scelta:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 - 2z \\ 4z - y = 17 - 6x \\ x + 5 = 2z - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y + 2z = 10 \\ 6x - y + 4z = 17 \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$D = \left|\begin{matrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad = \quad 6 - 4 + 24 - (-2 + 24 + 12) = 26 - 34 = -8$$

$$Dx = \left|\begin{matrix} 10 & -1 & 2 \\ 17 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 10 & -1 \\ 17 & -1 \\ -5 & 2 \end{matrix} \quad = \quad 20 + 20 + 68 - (10 + 80 + 34) = 108 - 124 = -16$$

$$Dy = \left|\begin{matrix} 3 & 10 & 2 \\ 6 & 17 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & 10 \\ 6 & 17 \\ 1 & -5 \end{matrix} \quad = \quad -102 + 40 - 60 - (34 - 60 - 120) = -122 - (-146) = 24$$

$$Dz = \left|\begin{matrix} 3 & -1 & 10 \\ 6 & -1 & 17 \\ 1 & 2 & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 3 & -1 \\ 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \quad = \quad 15 - 17 + 120 - (-10 + 102 + 30) = 118 - 122 = -4$$

$$\left(x = \frac{Dx}{D} = \frac{-16}{-8} = 2 \ ; \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{24}{-8} = -3 \ ; \qquad z = \frac{Dz}{D} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x}{2} + y\right)(1 - x) + \dfrac{x^2}{2}\right] = 1 - \dfrac{xy}{2} \\ \dfrac{1}{4}(3x - 11) + y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2} + y - xy + \dfrac{x^2}{2}\right] = 1 - \dfrac{xy}{2} \\ \dfrac{3}{4}x - \dfrac{11}{4} + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{2} + y - xy\right] = 1 - \dfrac{xy}{2} \\ 3x - 11 + 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{xy}{2} = 1 - \dfrac{xy}{2} \\ 3x - 11 + 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 1 \\ 3x - 11 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 2y \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 3(4 - 2y) + 4y = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 12 - 6y + 4y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ -2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 3 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x+y)-(x-y+5)=a \\ ax+2ay+a=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax+ay-x+y-5=a \\ ax+2ay+a=15 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-1)x+(a+1)y=a+5 \\ ax+2ay=15-a \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} a-1 & a+1 \\ a & 2a \end{vmatrix}=2a\cdot(a-1)-a\cdot(a+1)=2a^2-2a-a^2-a=a^2-3a \ = \ a\cdot(a-3)$$

$$Dx=\begin{vmatrix} a+5 & a+1 \\ 15-a & 2a \end{vmatrix}=2a\cdot(a+5)-(15-a)\cdot(a+1)=2a^2+10a-15a-15+a^2+a=$$

$$=3a^2-4a-15 \ = \ (a-3)\cdot(3a+5)$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & -4 & -15 \\ 3 & & 9 & 15 \\ \hline & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

$$Dy=\begin{vmatrix} a-1 & a+5 \\ a & 15-a \end{vmatrix}=(a-1)\cdot(15-a)-a(a+5)=15a-a^2-15+a-a^2-5a=$$

$$=-2a^2+11a-15 \ = \ -(2a^2-11a+15)=-(a-3)\cdot(2a-5)$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & -11 & 15 \\ 3 & & 6 & -15 \\ \hline & 2 & -5 & 0 \end{array}$$

$Se \quad a\cdot(a-3)\neq 0$
cioè $\ a\neq 0 \ e \ a\neq 3$

$$\begin{cases} x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{(a-3)\cdot(3a+5)}{a\cdot(a-3)}=\dfrac{3a+5}{a} \\ y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{-(a-3)\cdot(2a-5)}{a\cdot(a-3)}=\dfrac{5-2a}{a} \end{cases}$$

$$Se \quad a=0 \quad \begin{cases} x=\dfrac{(a-3)\cdot(3a+5)}{a\cdot(a-3)}=\dfrac{-3\cdot 5}{0\cdot(-3)}=\dfrac{-15}{0} \\ y=\dfrac{-(a-3)\cdot(2a-5)}{a\cdot(a-3)}=\dfrac{-(-3)\cdot(-5)}{0\cdot(-3)}=\dfrac{-15}{0} \end{cases} \qquad Sistema\ impossibile$$

$$Se \quad a=3 \quad \begin{cases} x=\dfrac{(a-3)\cdot(3a+5)}{a\cdot(a-3)}=\dfrac{(3-3)\cdot(3\cdot 3+5)}{3\cdot(3-3)}=\dfrac{0}{0} \\ y=\dfrac{-(a-3)\cdot(2a-5)}{a\cdot(a-3)}=\dfrac{(3-3)\cdot(2\cdot 3-5)}{3\cdot(3-3)}=\dfrac{0}{0} \end{cases} \qquad Sistema\ indeterminato$$

oppure

$$Se \quad a=0 \quad \begin{cases} -x+y=+5 \\ 0=15 \end{cases} \qquad Sistema\ impossibile$$

$$Se \quad a=3 \quad \begin{cases} 2x+4y=8 \\ 3x+6y=12 \end{cases} \qquad \left(\frac{a}{a^I}=\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{b}{b^I}=\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{c}{c^I}=\frac{2}{3}\right) \qquad Sistema\ indeterminato$$

$$\begin{cases} \dfrac{k-x}{k^2+k} + \dfrac{y-2k}{k+1} = -1 \\ \dfrac{x}{2} - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{k-x}{k(k+1)} + \dfrac{y-2k}{k+1} = -1 \\ x-2y=0 \end{cases} \qquad C.E.:\ k \neq 0\,;\quad k \neq -1$$

$Per\ \ k = 0\ \ e\ \ per\ \ k = -1\ \ l'equazione\ \ perde\ \ di\ \ significato.$

$$\begin{cases} \dfrac{k-x}{k(k+1)} + \dfrac{y-2k}{k+1} = -1 \\ x-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k-x+ky-2k^2 = -k^2-k \\ x-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+ky = k^2-2k \\ x-2y=0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -1 & k \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2-k$$

$$Dx = \begin{vmatrix} k^2-2k & k \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\left(k^2-2k\right) = -2k(k-2)$$

$$Dy = \begin{vmatrix} -1 & k^2-2k \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\left(k^2-2k\right) = -k(k-2)$$

$Se\ \ 2-k \neq 0$
$cioè\ \ se\ k \neq 2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-2k(k-2)}{2-k} = \dfrac{2k(2-k)}{2-k} = 2k \\ y = \dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-k(k-2)}{2-k} = \dfrac{k(2-k)}{2-k} = k \end{cases}$$

$Se\quad k = 2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2k(k-2)}{2-k} = \dfrac{-2\cdot 2(2-2)}{2-2} = \dfrac{0}{0} \\ y = \dfrac{-k(k-2)}{2-k} = \dfrac{-2\cdot(2-2)}{2-2} = \dfrac{0}{0} \end{cases} \qquad Sistema\ indeterminato$$

Riassumendo:

Parametro	**Tipo di sistema**	**Soluzione**
$k = 0 \ \vee\ k = -1$	*Equazione che perde di significato*	*Nessuna*
$k \neq 0 \ \wedge\ k \neq -1 \ \wedge\ k \neq 2$	*Sistema determinato*	$(x = 2k\ ;\ \ y = k)$
$k = 2$	*Sistema indeterminato*	*Infinite soluzioni*

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{y+2} - \dfrac{y-1}{x+1} = \dfrac{2x^2-y^2}{xy+y+2x+2} \\ x+y+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x-3}{y+2} - \dfrac{y-1}{x+1} = \dfrac{2x^2-y^2}{(y+2)(x+1)} \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(2x-3) - (y+2)(y-1) = 2x^2-y^2 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-3x+2x-3-y^2+y-2y+2 = 2x^2-y^2 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-y=1 \\ x+y+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y=-1 \end{cases} \qquad Sistema\ indeterminato\,.$$

3. *Un bibliotecario vuole disporre in ordine dei libri di storia sugli scaffali di una libreria. Se mette 8 libri su ogni scaffale, ne rimane vuoto uno; se invece mette 6 libri su ogni scaffale, riempie la libreria ma gli restano fuori 2 libri. Quanti libri deve sistemare il bibliotecario ?*

Soluzione

Ponendo: N° libri = x

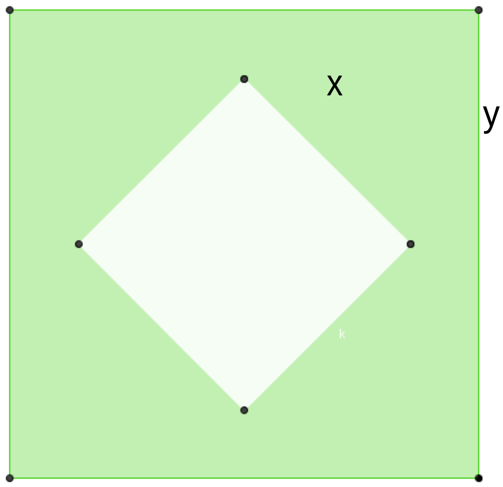
e N° scaffali = y

si ha:

$$\begin{cases} x = 8(y-1) \\ x-2 = 6y \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 8(y-1)-2 = 6y \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 8y-8-2 = 6y \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ 2y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8(5-1) \\ y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 32 \\ y = 5 \end{cases}$$

Pertanto il bibliotecario deve sistemare 32 libri.

4. *In una città si è costruita una aiuola quadrata tenuta a prato con al centro una fontana, anch'essa quadrata, disposta come in figura. Per i contorni, sia interno sia esterno, sono stati usati 176 m di bordo in marmo. Per il contorno esterno però sono serviti 112 m in più che per il contorno interno. Quanti metri quadrati di prato ci sono nell'aiuola ?*



Soluzione

Ponendo:

il lato interno dell'aiuola = x

e il lato esterno dell'aiuola = y

si ha:

$$\begin{cases} 4x+4y = 176 \\ 4y = 4x+112 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x+4y = +176 \\ 4x-4y = -112 \end{cases}$$

Applicando il metodo di riduzione si ottiene:

$$\begin{cases} 4x+4y = +176 \\ 4x-4y = -112 \end{cases} \quad - \; =$$

$$8y = +288\,; \qquad y = 36$$

$$\begin{cases} 4x+4y = +176 \\ 4x-4y = -112 \end{cases} \quad + \; =$$

$$8x = +64\,; \qquad x = 8$$

Il prato verde ha una superficie:

$$S = (36^2 - 8^2)\ m^2 = (1296-64)\ m^2 = 1232\ m^2\ .$$