Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : La retta + Pitagora e Euclide

28.03.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 2 C

A. Dato il triangolo di vertici: $A\,(7;-2)$, $B\,(-2;\ 1)$, $C\,(6;5)$:

1. *determina il perimetro*
2. *determina l'area (senza utilizzare la formula dell'area)*
3. *determina le coordinate dell'ortocentro T*
4. *determina le coordinate del circocentro E*
5. *determina le coordinate del baricentro G (senza utilizzare la formula del baricentro)*
6. *verifica che i tre punti T, E, G sono allineati*
7. *determina il quarto vertice del parallelogramma, i cui primi tre vertici sono i punti A , B e C*
8. *il triangolo* $A^I B^I C^I$ *simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto* $V(-1;3)$.

B. Sia ABCD un trapezio, di base maggiore AB e base minore CD. Indica con M, N e T, rispettivamente, i punti medi di AD, DC e CB. La retta NM incontra la retta AB in P e la retta NT incontra la retta AB in Q. Dimostra che il trapezio ABCD e il triangolo PQN sono equivalenti.

C. In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{5}{4}$ *della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo è 24 cm, determina l'area del triangolo.*

Valutazione	Esercizio	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B	C	Totale
	Punti	8	8	8	8	8	4	8	8	8	12	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce
Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : La retta + Pitagora e Euclide

28.03.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 2 C

A. Dato il triangolo di vertici: $A\,(7;-2)$, $B\,(-2;\ 1)$, $C\,(6;5)$:

1. *determina il perimetro*
2. *determina l'area (senza utilizzare la formula dell'area)*
3. *determina le coordinate dell'ortocentro T*
4. *determina le coordinate del circocentro E*
5. *determina le coordinate del baricentro G (senza utilizzare la formula del baricentro)*
6. *verifica che i tre punti T, E, G sono allineati*
7. *determina il quarto vertice del parallelogramma, i cui primi tre vertici sono i punti A , B e C*
8. *disegna il triangolo* $A^I B^I C^I$ *simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto* $V(-1;3)$.

B. Sia ABCD un trapezio, di base maggiore AB e base minore CD. Indica con M, N e T, rispettivamente, i punti medi di AD, DC e CB. La retta NM incontra la retta AB in P e la retta NT incontra la retta AB in Q. Dimostra che il trapezio ABCD e il triangolo PQN sono equivalenti.

C. In un triangolo rettangolo un cateto è i $\frac{5}{4}$ *della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo è 24 cm, determina l'area del triangolo.*

Valutazione	Esercizio	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B	C	Totale
	Punti	8	8	8	8	8	4	8	8	8	12	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

Dato il triangolo di vertici: $A\ (7;-2)$, $B\ (-2;\ 1)$, $C\ (6;5)$, *determina:*

1. Perimetro

Il perimetro è dato dalla somma dei tre lati:

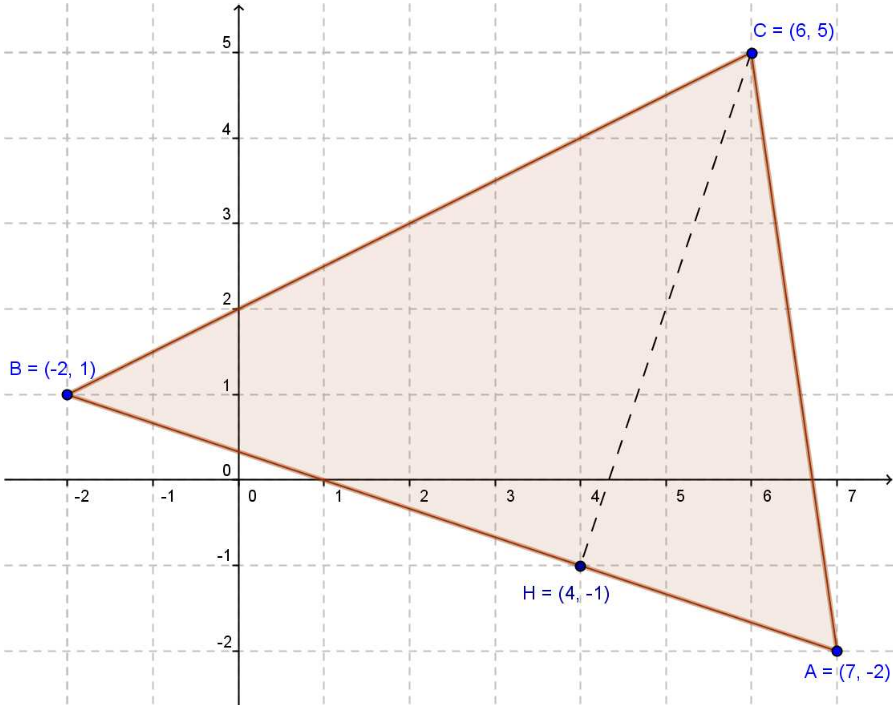
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(7+2)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-2-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(7-6)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Pertanto il perimetro del triangolo è:

$$\mathbf{2p} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \mathbf{3\sqrt{10} + 4\sqrt{5} + 5\sqrt{2}}$$



2. Area

Per il calcolo dell'area del triangolo occorre determinare la misura dell'altezza CH.

L'altezza CH rappresenta la distanza del punto C dalla retta AB.

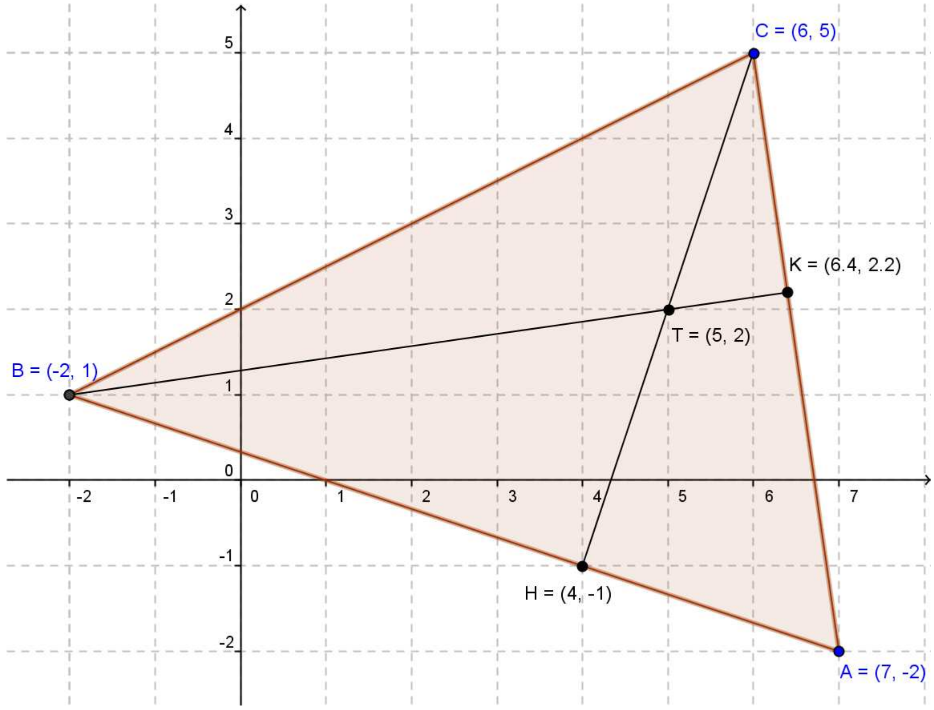
L'equazione della retta AB è data da:

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}\ ; \qquad \frac{y-1}{-2-1} = \frac{x+2}{7+2}\ ; \qquad \frac{y-1}{-3} = \frac{x+2}{9}\ ; \qquad -3\cdot(y-1) = x+2\ ; \qquad x + 3y - 1 = 0$$

$$L'altezza \quad CH = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1\cdot 6 + 3\cdot 5 - 1|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{|20|}{\sqrt{10}} = \frac{20}{\sqrt{10}}$$

L'area del triangolo è: $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH} = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{10}\cdot\frac{20}{\sqrt{10}} = \mathbf{30}$.

3. L'ortocentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre altezze.



Il coefficiente angolare della retta AB è:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-2-1}{7+2} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

La retta CH perpendicolare alla retta AB ha coefficiente angolare: $m_{CH} = -\frac{1}{m_{AB}} = +3$.

L'equazione dell'altezza CH è: $y - y_C = m_{CH}\,(x - x_C)$ *;* $\quad y - 5 = 3\,(x - 6)$ *;* $\quad y = 3x - 13$

Il coefficiente angolare della retta AC è:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2-5}{7-6} = -7$$

La retta BK perpendicolare alla retta AC ha coefficiente angolare: $m_{BK} = -\frac{1}{m_{AC}} = +\frac{1}{7}$.

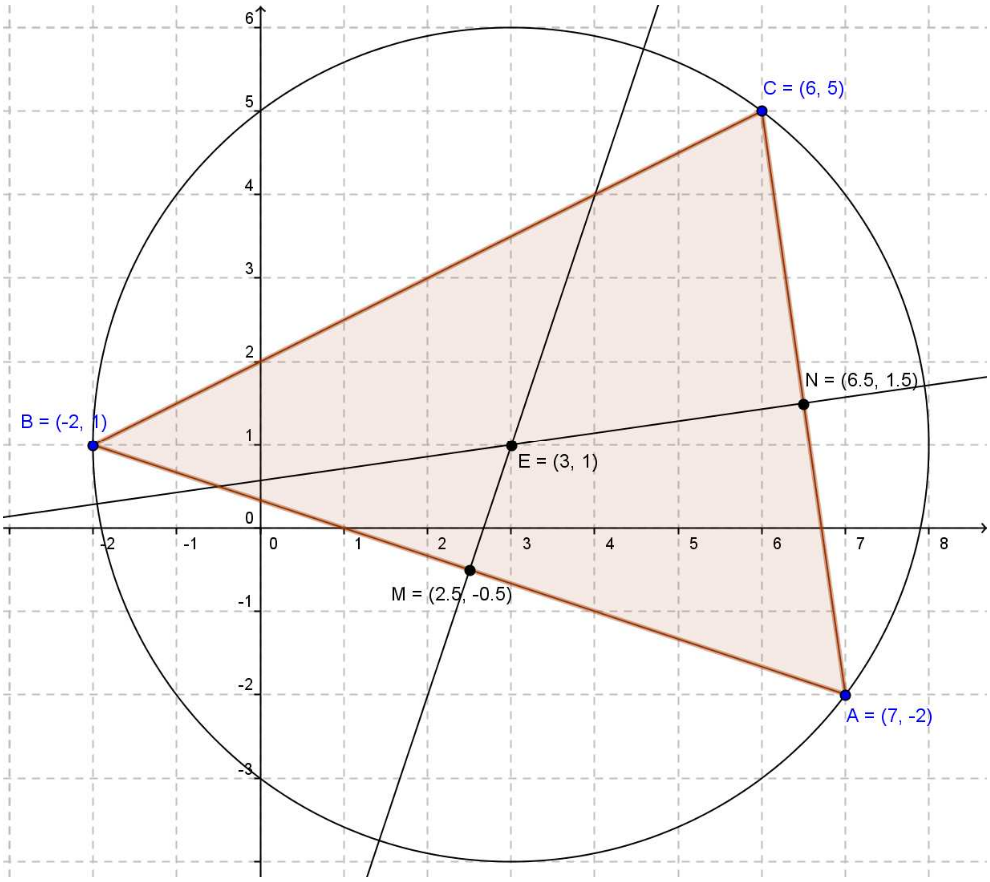
L'equazione dell'altezza BK è: $y - y_B = m_{BK}\,(x - x_B)$ *;* $\quad y - 1 = \frac{1}{7}\,(x + 2)$ *;* $\quad y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7}$

Le coordinate dell'ortocentro T, punto di incontro delle due altezze CH e BK, si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 13 \\ y = \frac{1}{7}x + \frac{9}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{7}x + \frac{9}{7} = 3x - 13 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 9 = 21x - 91 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x = 100 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \cdot 5 - 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Pertanto l'ortocentro ha coordinate: $\boldsymbol{T(5;\ 2)}$.

4. *Il circocentro di un triangolo è il punto d'incontro dei tre assi.*



Il punto medio M del lato AB ha coordinate:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7-2}{2} = \frac{5}{2} \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad M\left(\frac{5}{2};\, -\frac{1}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare della retta AB è: $m_{AB} = -\frac{1}{3}$

L'equazione dell'asse del segmento AB è:

$$y - y_M = -\frac{1}{m_{AB}}\,(x - x_M)\,; \qquad y + \frac{1}{2} = 3\,\left(x - \frac{5}{2}\right); \qquad y = 3x - 8$$

Il punto medio N del lato AC ha coordinate:

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{7+6}{2} = \frac{13}{2} \\ y_N &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad N\left(\frac{13}{2};\, \frac{3}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare della retta AC è già stato determinato in precedenza: $m_{AC} = -7$

L'equazione dell'asse del segmento AC è:

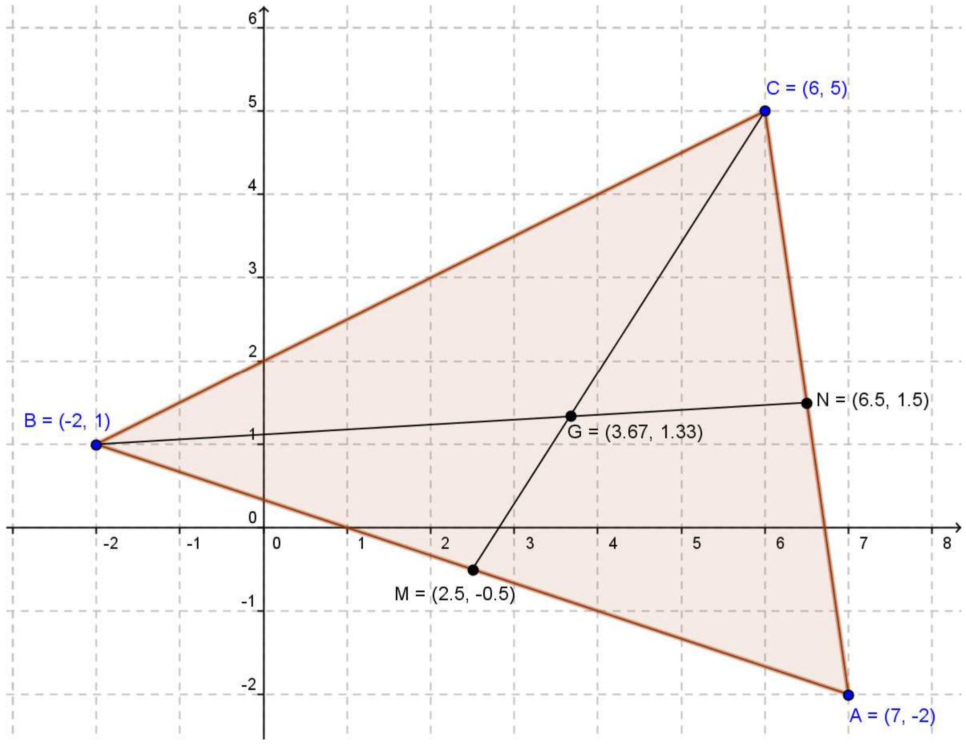
$$y - y_N = -\frac{1}{m_{AC}}\,(x - x_N)\,; \qquad y - \frac{3}{2} = \frac{1}{7}\left(x - \frac{13}{2}\right); \qquad y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$$

Le coordinate del circocentro E, punto di incontro dei due assi, si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 8 \\ y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{7}x + \frac{4}{7} = 3x - 8 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 4 = 21x - 56 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \begin{cases} 20x = 60 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \cdot 3 - 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Pertanto, il circocentro ha coordinate: $\boldsymbol{E(3;\ 1)}$.

5. Il baricentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre mediane.



Il punto medio M del lato AB ha coordinate: $M\left(\frac{5}{2};\,-\frac{1}{2}\right)$

L'equazione della mediana CM é:

$$\frac{y-y_M}{y_C-y_M}=\frac{x-x_M}{x_C-x_M}\ ; \qquad \frac{y+\frac{1}{2}}{5+\frac{1}{2}}=\frac{x-\frac{5}{2}}{6-\frac{5}{2}}\ ; \qquad \frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{11}{2}}=\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}}\ ; \qquad \frac{2}{11}\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{7}\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{2}{11}y+\frac{1}{11}=\frac{2}{7}x-\frac{5}{7}\ ; \qquad 14y+7=22x-55\ ; \qquad 22x-14y-62=0\ ; \qquad 11x-7y-31=0$$

Il punto medio N del lato AC ha coordinate: $N\left(\frac{13}{2};\,\frac{3}{2}\right)$

L'equazione della mediana BN è:

$$\frac{y-y_N}{y_B-y_N}=\frac{x-x_N}{x_B-x_N}\ ; \qquad \frac{y-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{x-\frac{13}{2}}{-2-\frac{13}{2}}\ ; \qquad \frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{x-\frac{13}{2}}{-\frac{17}{2}} \qquad -2\cdot\left(y-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{17}\cdot\left(x-\frac{13}{2}\right)$$

$$-2y+3=-\frac{2}{17}x+\frac{13}{17}\ ; \qquad -2y=-\frac{2}{17}x+\frac{13}{17}-3 \qquad y=\frac{1}{17}x+\frac{19}{17}$$

Le coordinate del baricentro G, punto di incontro delle due mediane CM e BN, si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}11x-7y-31=0\\ y=\frac{1}{17}x+\frac{19}{17}\end{cases} \qquad \begin{cases}11x-7\left(\frac{1}{17}x+\frac{19}{17}\right)-31=0\\ —\end{cases} \qquad \begin{cases}187x-7x-133-527=0\\ —\end{cases}$$

$$\begin{cases}180x=660\\ —\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{660}{180}\\ —\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{11}{3}\\ y=\frac{1}{17}\cdot\frac{11}{3}+\frac{19}{17}=\frac{68}{51}\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{11}{3}\\ y=\frac{4}{3}\end{cases}$$

Pertanto il baricentro ha coordinate: $\boldsymbol{G\left(\frac{11}{3};\,\frac{4}{3}\right)}$

Applicando la formula :

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{7-2+6}{3}=\frac{11}{3}$$
$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-2+1+5}{3}=\frac{4}{3}$$

6. Per verificare che i tre punti T, E, G sono allineati è sufficiente applicare la formula:

$$\frac{y_G - y_T}{y_E - y_T} = \frac{x_G - x_T}{x_E - x_T} \; ; \qquad \frac{\frac{4}{3} - 2}{1 - 2} = \frac{\frac{11}{3} - 5}{3 - 5} \; ; \qquad \frac{-\frac{2}{3}}{-1} = \frac{-\frac{4}{3}}{-2} \; ; \qquad \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \; .$$

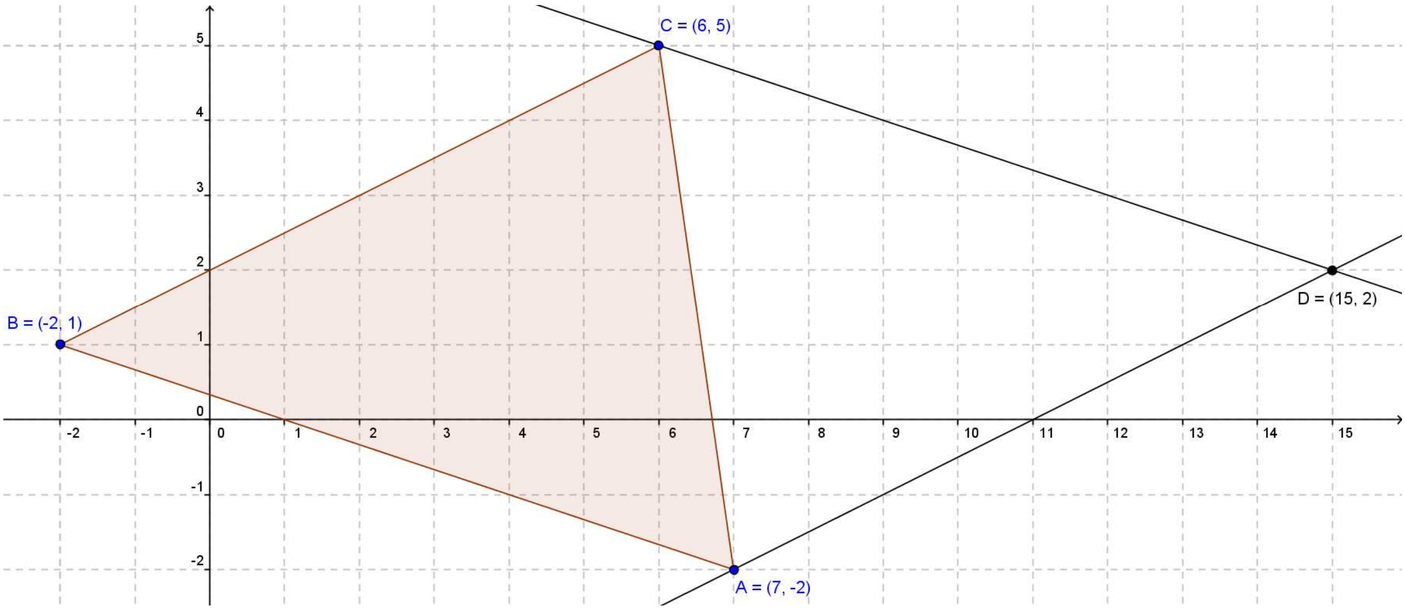
Oppure occorre verificare che: $m_{TE} = m_{TG}$.

$$m_{TE} = \frac{y_T - y_E}{x_T - x_E} = \frac{2 - 1}{5 - 3} = \frac{1}{2} \qquad\qquad m_{TG} = \frac{y_T - y_G}{x_T - x_G} = \frac{2 - \frac{4}{3}}{5 - \frac{11}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

7. Per determinare il quarto vertice del parallelogramma occorre trovare le equazioni delle due rette r ed s :

La retta r passante per il punto C e parallela al lato AB

La retta s passante per il punto A e parallela al lato BC



La retta r passante per il punto C e parallela al lato AB ha equazione:

$$y - y_C = m_{AB}\,(x - x_C) \; ; \qquad y - 5 = -\tfrac{1}{3}\,(x - 6) \; ; \qquad y = -\tfrac{1}{3}x + 7$$

La retta s passante per il punto A e parallela al lato BC

$$y - y_A = m_{BC}\,(x - x_A) \; ; \qquad y + 2 = \tfrac{1}{2}\,(x - 7) \; ; \qquad y = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{11}{2}$$

Le coordinate del quarto vertice D del parallelogramma si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + 7 \\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{11}{2} = -\dfrac{1}{3}x + 7 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 33 = -2x + 42 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x = 75 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 15 \\ y = 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; D(15;\; 2)$$

Applicando le formule, come verifica, si ottiene :

$$\begin{matrix} x_D + x_B = x_A + x_C \\ y_D + y_B = y_A + y_C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_D - 2 = 7 + 6 \\ y_D + 1 = 5 - 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_D = 15 \\ y_D = 2 \end{matrix} \quad lo\ stesso\ risultato\ .$$

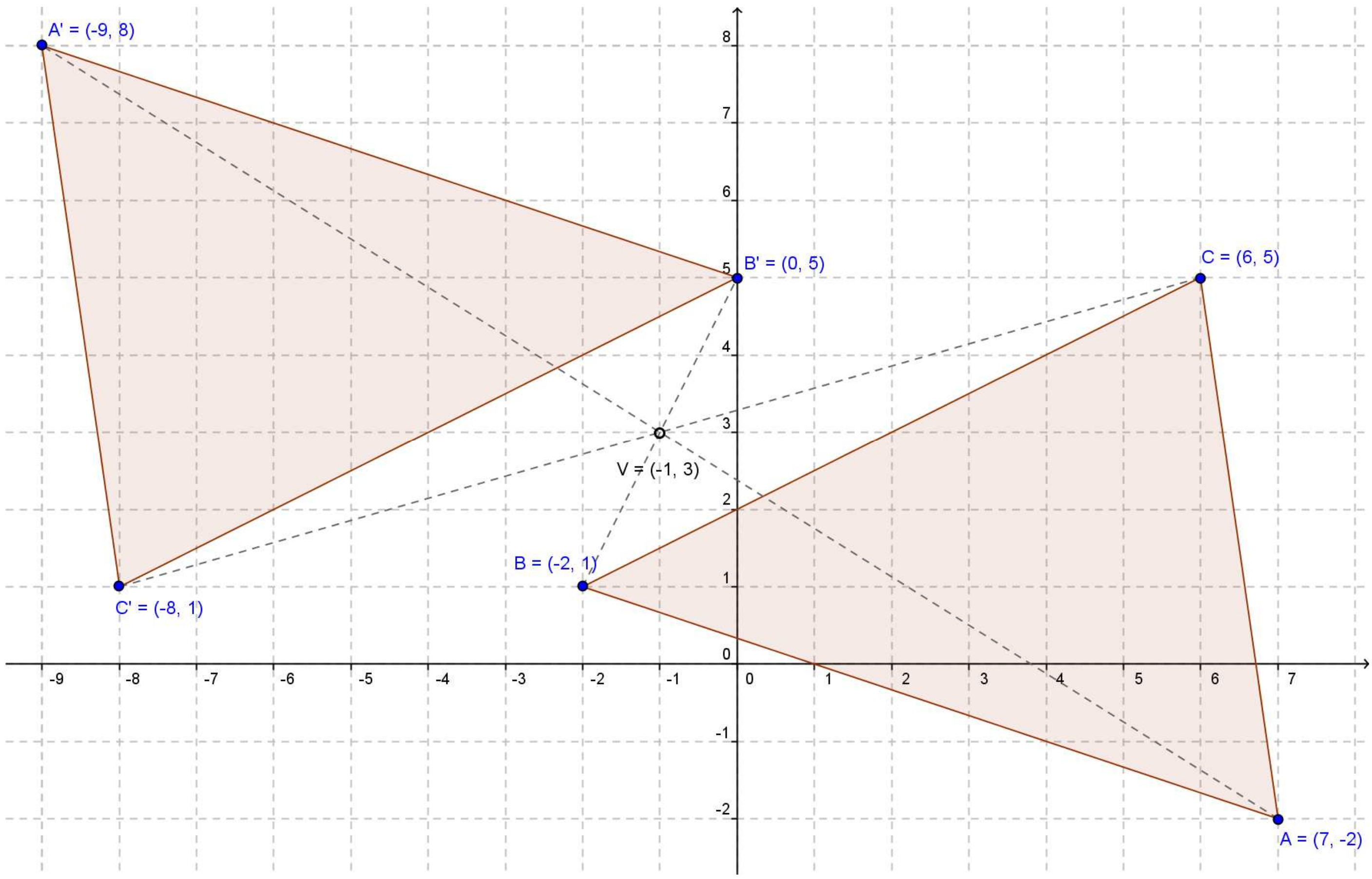
7. Per determinare il triangolo $A^I B^I C^I$ simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto $V(-1;3)$ occorre utilizzare le equazioni della simmetria centrale.

Le equazioni della simmetria centrale si ottengono utilizzando le formule del punto medio di un segmento:

$$\begin{cases} x_V = \dfrac{x_A + x_{A^I}}{2} \\ y_V = \dfrac{y_A + y_{A^I}}{2} \end{cases} \qquad da\ cui\ si\ ottengono: \quad \begin{cases} x_{A^I} = 2x_V - x_A \\ y_{A^I} = 2y_V - y_A \end{cases}$$

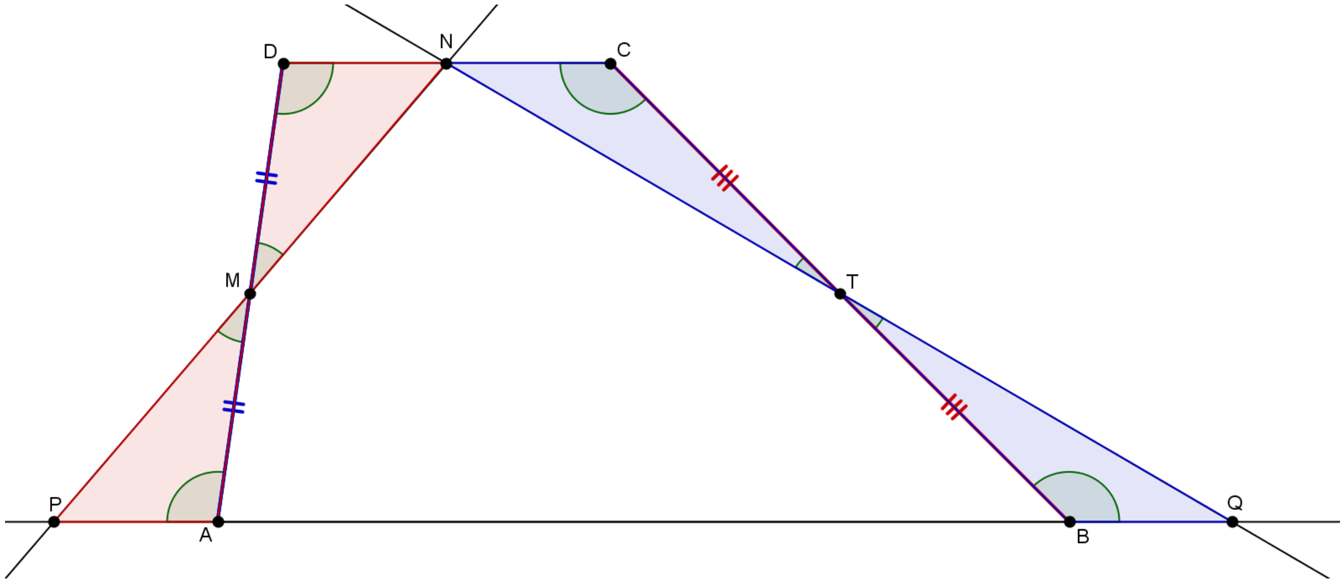
Applicando le equazioni della simmetria centrale si ottengono:

$$\begin{cases} x_{A^I} = 2 \cdot (-1) - 7 = -9 \\ y_{A^I} = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B^I} = 2 \cdot (-1) + 2 = 0 \\ y_{B^I} = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C^I} = 2 \cdot (-1) - 6 = -8 \\ y_{C^I} = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \end{cases}$$



B. Sia ABCD un trapezio, di base maggiore AB e base minore CD. Indica con M, N e T, rispettivamente, i punti medi di AD, DC e CB. La retta NM incontra la retta AB in P e la retta NT incontra la retta AB in Q. Dimostra che il trapezio ABCD e il triangolo PQN sono equivalenti.

IPOTESI		TESI
ABCD è un trapezio $AM \cong MD$ $DN \cong NC$ $CT \cong TB$	$\Rightarrow$	$ABCD \doteq PQN$



Il trapezio ABCD e il triangolo PQN sono equivalenti perché sono equicomposti:

$ABCD \doteq ABTNM + DMN + NCT$

$PQN \doteq ABTNM + PMA + BTQ$

I triangoli DMN e PMA sono congruenti per il II C.C.T. Infatti:

$MD \cong AM$ *per ipotesi*

$N\widehat{M}D \cong P\widehat{M}A$ *perché opposti al vertice*

$M\widehat{D}N \cong M\widehat{A}P$ *perché alterni interni .*

I triangoli NCT e BTQ sono congruenti per il II C.C.T. Infatti:

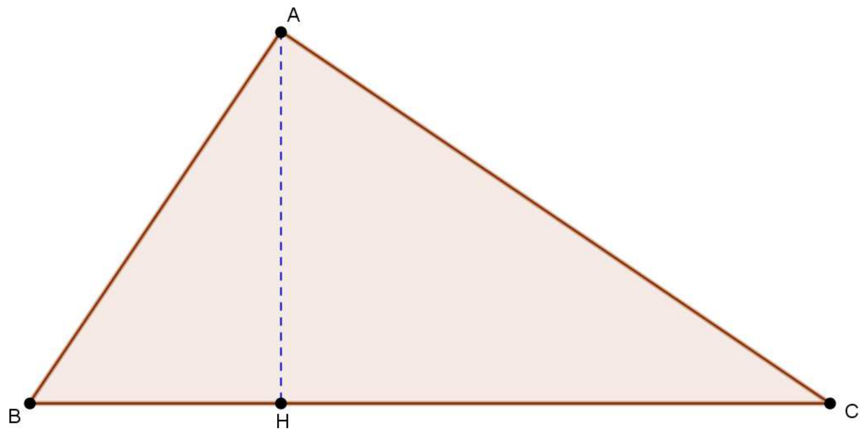
$CT \cong BT$ *per ipotesi*

$C\widehat{T}N \cong B\widehat{T}Q$ *perché opposti al vertice*

$N\widehat{C}T \cong Q\widehat{B}T$ *perché alterni interni .*

C. *In un triangolo rettangolo un cateto è i* $\frac{5}{4}$ *della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo è 24 cm, determina l'area del triangolo.*

<u>Soluzione</u>



$Ponendo\ \overline{HC} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \frac{5}{4}x$

$Applicando\ il\ I°\ T\ di\ Euclide\ si\ ha$: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{HC}} = \frac{\frac{25}{16}x^2}{x} = \frac{25}{16}x$

$Inoltre\ \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\frac{625}{256}x^2 - \frac{25}{16}x^2} = \sqrt{\frac{625-400}{256}x^2} = \sqrt{\frac{225}{256}x^2} = \frac{15}{16}x$.

Utilizzando il perimetro $2p = 24\ cm$ *si ottiene:*

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 24$; $\quad \frac{15}{16}x + \frac{25}{16}x + \frac{5}{4}x = 24$; $\quad 15x + 25x + 20x = 384$

$60x = 384$; $\quad x = \frac{384}{60} = \frac{32}{5}$

$Quindi$: $\quad \overline{AC} = \frac{5}{4} \cdot \frac{32}{5} = 8\ cm \quad \quad \overline{AB} = \frac{15}{16} \cdot \frac{32}{5} = 6\ cm$

$Pertanto\ l'area\ del\ triangolo$ è: $\quad S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8\right) cm^2 = 24\ cm^2$.