Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Equazioni di II grado

21.12.2011

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 C

1. L'equazione $4x^2 + \ldots\ldots = 0$ ha per soluzioni $x_1 = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad x_2 = 0$

2. Qual è il discriminante dell'equazione $x^2 + 6 = 0$?

   ☐ -23 ☐ -24 ☐ $+23$ ☐ $+24$ ☐ 36

3. Determina due numeri sapendo che la loro somma è $0{,}1$ e il loro prodotto è $-0{,}2$

4. Risolvi le seguenti equazioni:

   $2x^2 + \frac{3}{5}x = 0$ $\qquad$ $5x^2 - 9x + 4 = 0$

   $2x^2 + \left(2\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)x + \sqrt{15} = 0$ $\qquad$ $\frac{x}{x+2} - \frac{13}{10-3x} = \frac{32}{3x^2 - 4x - 20}$

5. Determina per quali valori del parametro a l'equazione: $x^2 + 6x + 3 - a(x^2 - 2x) - a = 0$

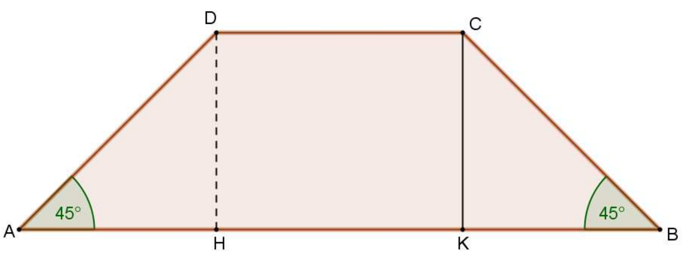
   a. *ha radici reali*
   b. *ha una radice uguale a 2*
   c. *ha due radici opposte*
   d. *ha due radici la cui somma è uguale a 4*
   e. *ha due radici il cui prodotto è uguale a 5*
   f. *ha due radici in cui una è il reciproco dell'altra*
   g. *ha due radici in cui una è l'opposto del reciproco dell'altra*

6. Effettua la discussione della seguente equazione letterale intera: $(3x - 3)ax + 3 - 3x = 0$

7. Effettua la discussione della seguente equazione letterale fratta:

   $$\frac{2(a-1)}{a(x^2 - 2x + 1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{a(x-1)}$$

8. Determina il perimetro di un trapezio isoscele, sapendo che l'area è $288\ \text{cm}^2$, il rapporto fra l'altezza e la base minore è $\frac{4}{5}$ e gli angoli alla base misurano $45°$.



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
	Punti	4	4	5	5 + 5 + 6 + 7	14	10	10	10	80

Punti	*0 - 5*	*6 - 10*	*11 - 15*	*16 - 20*	*21 - 25*	*26 - 30*	*31 - 35*	*36 - 40*	*41 - 45*	*46 - 50*	*51 - 55*	*56 - 60*	*61 - 65*	*66 - 70*	*71 - 75*	*76 - 80*
Voto	*2*	*2½*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. L'equazione $4x^2 + \ldots\ldots = 0$ ha per soluzioni $x_1 = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad x_2 = 0$

<u>*Soluzione*</u>

Essendo $x_2 = 0$ *una soluzione* $\Rightarrow$ *l'equazione è incompleta spuria, cioè del tipo:*

$4x^2 + bx = 0\,;\quad x \cdot (4x + b) = 0\,;\quad \begin{matrix} x = 0 \\ 4x + b = 0 \end{matrix}$

Essendo $x_1 = \frac{2}{3}$ *una soluzione* $\Rightarrow$

$4 \cdot \frac{2}{3} + b = 0\,;\qquad \frac{8}{3} + b = 0\,;\qquad b = -\frac{8}{3}$

2. Qual è il discriminante dell'equazione $x^2 + 6 = 0$?

$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -24$

3. Determina due numeri sapendo che la loro somma è $0{,}1$ e il loro prodotto è $-0{,}2$.

$x^2 - sx + p = 0\,;\qquad x^2 - 0{,}1x - 0{,}2 = 0\,;\qquad x^2 - \frac{1}{10}x - \frac{2}{10} = 0\,;$

$10x^2 - x - 2 = 0\,;\qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-2) = 1 + 80 = 81$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{1 \mp \sqrt{81}}{2 \cdot 10} = \frac{1 \mp 9}{20} = \begin{matrix} x_1 = \frac{1-9}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{4}{10} = -0{,}4 \\ x_2 = \frac{1+9}{20} = +\frac{10}{20} = +\frac{5}{10} = +0{,}5 \end{matrix}$$

4. Risolvi le seguenti equazioni:

$2x^2 + \frac{3}{5}x = 0\,;\qquad 10x^2 + 3x = 0\,;\qquad x \cdot (10x + 3) = 0\,;\qquad \begin{matrix} x = 0 \\ 10x + 3 = 0\,;\quad x = -\frac{3}{10} \end{matrix}$

$5x^2 - 9x + 4 = 0\,;\qquad \Delta = b^2 - 4\,a\,c = 81 - 80 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{9 \mp \sqrt{1}}{2 \cdot 5} = \frac{9 \mp 1}{10} = \begin{matrix} x_1 = \frac{9-1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \\ x_2 = \frac{9+1}{10} = \frac{10}{10} = 1 \end{matrix}$$

$$2x^2+\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{15}=0$$

$$\Delta = b^2-4\,a\,c=\left(2\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 2\cdot\sqrt{15}\ =20+3+4\sqrt{15}-8\sqrt{15}=20+3-4\sqrt{15}=\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$$

$$x_{1,2}\ =\ \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\ =\ \frac{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}\mp\sqrt{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2\cdot 2}\ =\ \frac{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}\mp\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{4}\ =$$

$$= \begin{cases} x_1=\dfrac{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{-4\sqrt{5}}{4}\ =\ -\sqrt{5} \\ x_1=\dfrac{-2\sqrt{5}-\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}\ =\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}\ =-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+2}-\frac{13}{10-3x}=\frac{32}{3x^2-4x-20}\ ;\qquad \frac{x}{x+2}-\frac{13}{10-3x}=\frac{32}{(x+2)(3x-10)}\ ;$$

$$\frac{x}{x+2}-\frac{13}{-(3x-10)}=\frac{32}{(x+2)(3x-10)}\ ;\qquad \frac{x}{x+2}+\frac{13}{3x-10}=\frac{32}{(x+2)(3x-10)}\ ;$$

$C.E.:\ x\neq -2\ \wedge\ x\neq\dfrac{10}{3}$

$moltiplicando\ per\ il\ \ m.c.m.=(x+2)(3x-10)$

$x\cdot(3x-10)+13\cdot(x+2)=32\ ;\qquad 3x^2-10x+13x+26-32=0$

$3x^2+3x-6=0\qquad x^2+x-2=0$

$\Delta = b^2-4\,a\,c=1+8=9$

$$x_{1,2}\ =\ \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}\ =\ \frac{-1\mp\sqrt{9}}{2\cdot 1}\ =\ \frac{-1\mp 3}{2}\ =\ \begin{cases} x_1=\dfrac{-1-3}{2}=\dfrac{-4}{2}\ =\ -2\ \ non\ Accettabile \\ x_1=\dfrac{-1+3}{2}\ =\dfrac{2}{2}\ =\ +1\quad Accettabile \end{cases}$$

5. Determina per quali valori del parametro a l'equazione: $x^2+6x+3-a(x^2-2x)-a=0$

   a. *ha radici reali*
   b. *ha una radice uguale a 2*
   c. *ha due radici opposte*
   d. *ha due radici la cui somma è uguale a 4*
   e. *ha due radici il cui prodotto è uguale a 5*
   f. *ha due radici in cui una è il reciproco dell'altra*
   g. *ha due radici in cui una è l'opposto del reciproco dell'altra*

<u>Soluzione</u>

Riconduciamo l'equazione alla forma normale: $Ax^2+Bx+C=0$

$x^2+6x+3-a(x^2-2x)-a=0$; $\qquad x^2+6x+3-ax^2+2ax-a=0$

$\boxed{(1-a)x^2+2(a+3)x+3-a=0}$

$A=1-a$	$B=2(a+3)$	$C=3-a$

Innanzitutto $1-a\neq 0$; *cioè* $a\neq 1$ altrimenti l'equazione diventa di I grado $(*)$

a. *ha radici reali*

$\frac{\Delta}{4}\geq 0$; $\qquad (a+3)^2-(1-a)(3-a)\geq 0$

$a^2+9+6a-3+a+3a-a^2\geq 0$; $\qquad 10a\geq -6$; $\qquad a\geq -\frac{3}{5}$ $\quad (**)$

b. *ha una radice uguale a 2*

Imponiamo che $x=2$ sia soluzione dell'equazione: $(1-a)x^2+2(a+3)x+3-a=0$

$(1-a)\cdot 2^2+2(a+3)\cdot 2+3-a=0$

$(1-a)\cdot 4+4\cdot(a+3)+3-a=0$

$4-4a+4a+12+3-a=0$

$a=19$ Accettabile $\qquad$ (perché $a\geq -\frac{3}{5}$ e $a\neq 1$)

c. *ha due radici opposte*

$B=0$; $\qquad 2(a+3)=0$; $\qquad a=-3$ Non accettabile $\qquad$ (perché (*) $a<-\frac{3}{5}$)

d. *ha due radici la cui somma è uguale a 4*

$-\frac{B}{A}=4$; $\qquad -\frac{2(a+3)}{1-a}=4$; $\qquad -2(a+3)=4(1-a)$; $\qquad -2a-6=4-4a$

$4a-2a=4+6$; $\qquad 2a=10$; $\qquad a=5$ *Accettabile* $\qquad$ (perché $a\geq -\frac{3}{5}$ *e* $a\neq 1$)

e. *ha due radici il cui prodotto è uguale a 5*

$\frac{C}{A}=5$; $\qquad \frac{3-a}{1-a}=5$; $\qquad 3-a=5(1-a)$; $\qquad 3-a=5-5a$

$5a-a=5-3$; $\qquad 4a=2$; $\qquad a=\frac{1}{2}$ *Accettabile* $\qquad$ (perché $a\geq -\frac{3}{5}$ *e* $a\neq 1$)

f. *ha due radici in cui una è il reciproco dell'altra*

$x_1 = \frac{1}{x_2}$; $x_1 \cdot x_2 = 1$; $\frac{c}{a} = 1$; $\frac{3-a}{1-a} = 1$; $3 - a = 1 - a$; $3 = 1$ *impossibile*

L'equazione non può avere soluzioni reciproche

g. *ha due radici in cui una è l'opposto del reciproco dell'altra*

$x_1 = -\frac{1}{x_2}$; $x_1 \cdot x_2 = -1$; $\frac{c}{a} = -1$; $\frac{3-a}{1-a} = -1$; $3 - a = -1 + a$; $2a = 4$

$a = 2$ *Accettabile* (perché $a \geq -\frac{3}{5}$ e $a \neq 1$)

6. Effettua la discussione della seguente equazione letterale intera: $(3x-3)ax+3-3x=0$

Soluzione

Occorre trasformare l'equazione nella sua forma canonica: $Ax^2+Bx+C=0$.

$3ax^2-3ax+3-3x=0$; $\qquad ax^2-ax-x+1=0$

$\boxed{ax^2-(a+1)x+1=0}$

$A=a$	$B=-(a+1)$	$C=1$

$A=0$ *(Equazione di I grado)* $\Rightarrow \quad a=0 \quad \Rightarrow \quad -x+1=0\,; \quad x=1$

$B=0$ *(Equazione Pura)* $\Rightarrow \quad -(a+1)=0\,; \quad a=-1 \quad \Rightarrow \quad -x^2+1=0\,; \quad x^2=1\,; \quad x_{1,2}=\mp 1$

$C=0$ *(Equazione Spuria)* $\Rightarrow \quad 1=0$ *per nessun valore di a .*

$\boldsymbol{\Delta=[-(a+1)]^2-4a=a^2+1+2a-4a=a^2+1-2a=(a-1)^2}$

$\Delta=0;\quad (a-1)^2=0\,;\quad a-1=0\,;\quad a=1 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+1=0\,;\quad (x-1)^2=0\,;\quad x=1 \text{ doppia}$

$\Delta<0 \qquad (a-1)^2<0$ per nessun valore di a.

$\Delta>0;\quad (a-1)^2>0\,;\quad a-1\neq 0\,;\quad a\neq 1$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{a+1\mp\sqrt{(a-1)^2}}{2a}=\frac{a+1\mp(a-1)}{2a}=$$

$$= \begin{array}{l} x_1=\dfrac{a+1-a+1}{2a}=\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{a} \\ x_2=\dfrac{a+1+a-1}{2a}=\dfrac{2a}{2a}=1 \end{array}$$

Riepilogando:

Valore del parametro	**Tipo di Equazione**	**Soluzioni**
$a=0$	*Equazione di I° grado*	$x=1$
$a=-1$	*Equazione Pura*	$x_{1,2}=\mp 1$
Per nessun valore di a	*Equazione Spuria*	
$a=1$	*Equazione Completa con* $\Delta=0$	$x_{1,2}=1$
Per nessun valore di a	*Equazione Completa con* $\Delta<0$	
$a\neq 0 \quad e \quad a\neq \mp 1$	*Equazione Completa con* $\Delta>0$	$x_1=\frac{1}{a} \quad \wedge \quad x_2=1$

7. Effettua la discussione della seguente equazione letterale fratta:

$$\frac{2(a-1)}{a(x^2-2x+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{a(x-1)}$$

<u>*Soluzione*</u>

$$\frac{2(a-1)}{a(x^2-2x+1)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{a(x-1)} \ ; \qquad \frac{2(a-1)}{a(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{a(x-1)} \ ;$$

Il campo di esistenza del parametro è : $C.E.: \ a \neq 0$

Il campo di accettabilità delle soluzioni è : $\mathrm{C.A.}: \ x \neq 1$

Moltiplicando per il $\ m.c.m. \ = \ a(x-1)^2$

$$a(x-1)^2 \cdot \frac{2(a-1)}{a(x-1)^2} = a(x-1)^2 \cdot \frac{2}{x-1} - a(x-1)^2 \cdot \frac{x}{a(x-1)}$$

$2(a-1) = 2a(x-1) - x(x-1)$

$2a-2 = 2ax - 2a - x^2 + x$

$x^2 - 2ax - x + 4a - 2 = 0$

$x^2-(2a+1)x+4a-2=0$

$A=1$	$B=-(2a+1)$	$C=4a-2$

$A = 0$ *(Equazione di I grado)* $\Rightarrow \quad 1 = 0 \quad$ per nessun valore di a

$B = 0$ *(Equazione Pura)* $\Rightarrow \ -(2a+1) = 0\,; \quad a = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0\,; \quad x^2 = 4\,; \quad x_{1,2} = \mp 2$

$C = 0$ *(Equazione Spuria)* $\Rightarrow \quad 4a - 2 = 0\,; \quad a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0\,; \quad x_1 = 0 \ \wedge \ x_1 = 2$

$\Delta = [-(2a+1)]^2 - 4(4a-2) = 4a^2 + 1 + 4a - 16a + 8 = 4a^2 + 9 - 12a = (2a-3)^2$

$\Delta = 0 \quad (2a-3)^2 = 0\,; \ \ 2a-3 = 0\,; \ \ a = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0\,; \quad (x-2)^2 = 0\,; \quad x = 2 \ \ doppia$

$\Delta < 0 \quad (2a-3)^2 < 0 \quad$ per nessun valore di a.

$\Delta > 0 \quad (2a-3)^2 > 0\,; \quad 2a-3 \neq 0\,; \quad a \neq \frac{3}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{2a+1 \mp \sqrt{(2a-3)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{2a+1 \mp (2a-3)}{2} =$$

$$= \begin{matrix} x_1 = \dfrac{2a+1-2a+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \quad Accettabile \\ x_2 = \dfrac{2a+1+2a-3}{2} = \dfrac{4a-2}{2} = 2a-1 \quad ? \end{matrix}$$

La soluzione $\ x_2 = 2a-1\ $ è accettabile soltanto se diversa da 1 *(vedi campo di accettabilità).*

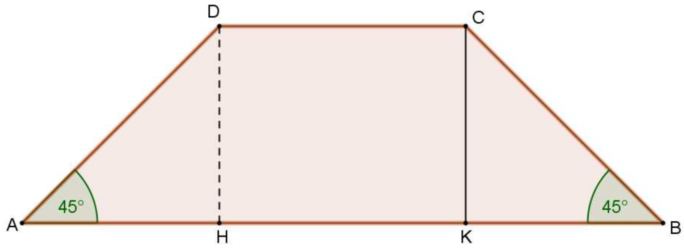
$x_2 \neq 1\ ; \qquad 2a-1 \neq 1\ ; \qquad 2a \neq 2\ ; \qquad a \neq 1$

$Se\ a = 1 \quad la\ soluzione \quad x_2 = 2a-1 \ \ non\ è\ accettabile\ e\ l'equazione\ ha\ solo\ la\ soluzione\ \ x_1 = 2$

Riepilogando:

Valore del parametro	Tipo di Equazione	Soluzioni
$a = 0$	*Perde di significato*	
Per nessun valore di a	*Equazione di I° grado*	
$a = -\frac{1}{2}$	*Equazione Pura*	$x_{1,2} = \mp 2$
$a = \frac{1}{2}$	*Equazione Spuria*	$x_1 = 0 \ \wedge \ x_1 = 2$
$a = \frac{3}{2}$	*Equazione con* $\Delta = 0$	$x_{1,2} = 2$
Per nessun valore di a	*Equazione con* $\Delta < 0$	
$a \neq 0 \ \wedge \ a \neq \frac{3}{2} \ \wedge \ a \neq 1$	*Equazione con* $\Delta > 0$	$x_1 = 2 \ \wedge \ x_2 = 2a - 1$
$a = 1$	*Equazione con* $\Delta > 0$	$Una\ sola\ soluzione\ accettabile\ \ x_1 = 2$

8. Determina il perimetro di un trapezio isoscele, sapendo che l'area è $288\,\text{cm}^2$, il rapporto fra l'altezza e la base minore è $\frac{4}{5}$ e gli angoli alla base misurano $45°$.



Soluzione

$$Essendo \quad \frac{\overline{DH}}{\overline{DC}} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{DH} = \frac{4}{5}\overline{DC}$$

$$Ponendo \quad \overline{DC} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{DH} = \frac{4}{5}x$$

$$Essendo\ \widehat{ABC} = 45° \qquad \Rightarrow \quad il\ triangolo\ ADH\ \text{è}\ isoscele \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AH} = \overline{DH} = \frac{4}{5}x$$

$$Mentre \qquad \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = \frac{4}{5}x + x + \frac{4}{5}x = \frac{13}{5}x$$

Dalla relazione dell'area del trapezio si ottiene:

$$S = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{DH} \ ; \qquad 288 = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{5}x + x\right) \cdot \frac{4}{5}x$$

$$288 = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{5}x \cdot \frac{4}{5}x \ ; \qquad 288 = \frac{36}{25}x^2$$

$$x^2 = \frac{25}{36} \cdot 288 = 200 \ ; \qquad x = \mp\sqrt{200} = \mp 10\sqrt{2}$$

$$Escludendo\ la\ soluzione\ negativa\ si\ ha: \quad \overline{DC} = 10\sqrt{2}\ cm$$

$$Mentre \quad \overline{DH} = \frac{4}{5}x = \frac{4}{5} \cdot 10\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\ cm$$

$$e \qquad \overline{AB} \ = \ \frac{13}{5} \cdot 10\sqrt{2}\ cm \ = \ 26\sqrt{2}\ cm$$

Applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{DH}^2} \ = \ \sqrt{\left(8\sqrt{2}\right)^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} \ = \ \sqrt{128 + 128} \ = \ \sqrt{256} = 16$$

Pertanto il perimetro del trapezio è:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \left(26\sqrt{2} + 16 + 10\sqrt{2} + 16\right) cm = \left(32 + 36\sqrt{2}\right) cm \ = \ 4\left(8 + 9\sqrt{2}\right) cm$$