Prova di Matematica : Sistemi di equazioni e problemi di I grado

08.10.2011
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 B

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 18 \\ 5x - y - 16 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 6y - 8 = 0 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases}$$

2. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con un metodo a tua scelta:

$$\begin{cases} 2x - y = 4z + 3 \\ 3y - x + z = -10 \\ 3x + 2y + 2 = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(5x - 3y) - \frac{2x - 1}{3} = 8 + \frac{1}{2}(6y - 5) \\ \frac{2x - 3}{4} - \frac{1 - 3y}{2} = \frac{6y - 1}{2} + \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2x - 8y}{x - 2} = \frac{6x + 1}{3x - 6} + \frac{2(4y - 1)}{2 - x} \\ \frac{3x}{y - 1} - 1 = -\frac{6}{1 - y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x - y}{a} + \frac{x - 1}{a - 2} = 2 \\ \frac{x}{a - 2} - \frac{y}{a - 1} = \frac{2a - 3}{a^2 - 3a + 2} \end{cases}$$

3. In una prima elementare sono iscritti 18 alunni. Sapendo che alcuni di questi hanno 5 anni e altri 6, e che l'età complessiva degli iscritti è di 100 anni, calcola quanti sono i bambini di 5 anni e quanti di 6 anni.

4. In un triangolo isoscele ABC siano M e N i punti medi dei lati uguali CA e CB. Sapendo che il perimetro del triangolo ABC è 72 cm, mentre il perimetro del trapezio ABNM è 56 cm determina l'area del triangolo ABC.

5. Dimostra le formule del metodo di Cramer

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	Totale
	Punti	20 + 2	8 + 8 + 8 + 12	8	8	6	80

Punti	0 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35	36 - 40	41 - 45	46 - 50	51 - 55	56 - 60	61 - 65	66 - 70	71 - 75	76 - 80
Voto	2	2½	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

Soluzione

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con i cinque metodi studiati:

Metodo di sostituzione

$\begin{cases} 7x+3y=18 \\ 5x-y-16=0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dots \\ y=5x-16 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x+3(5x-16)=18 \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} 7x+15x-48=18 \\ \dots \end{cases}$

$\begin{cases} 22x=66 \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=5\cdot 3-16 \end{cases}$ $\begin{cases} x=+3 \\ y=-1 \end{cases}$

Metodo del confronto

$\begin{cases} 7x+3y=18 \\ 5x-y-16=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=6-\frac{7}{3}x \\ y=5x-16 \end{cases}$ $\begin{cases} 6-\frac{7}{3}x=5x-16 \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} 18-7x=15x-48 \\ \dots \end{cases}$

$\begin{cases} -7x-15x=-48-18 \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} 22x=66 \\ \dots \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=5\cdot 3-16 \end{cases}$ $\begin{cases} x=+3 \\ y=-1 \end{cases}$

Metodo di riduzione

$\begin{matrix} 5\cdot \\ 7\cdot \end{matrix}\begin{cases} 7x+3y=18 \\ 5x-y=16 \end{cases}$ $\begin{cases} 35x+15y=\ 90 & - \\ 35x-\ 7y=112 & = \end{cases}$

$22y=-22\ ;\qquad y=-1$

$\begin{matrix} 1\cdot \\ 3\cdot \end{matrix}\begin{cases} 7x+3y=18 \\ 5x-y=16 \end{cases}$ $\begin{cases} 7x\ +\ 3y=18 & + \\ 15x\ -\ 3y=48 & = \end{cases}$

$22x\qquad =66\ ;\qquad x=3$

$\begin{cases} x=+3 \\ y=-1 \end{cases}$

Metodo di Cramer

$\begin{cases} 7x+3y=18 \\ 5x-y=16 \end{cases}$

$D=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=7\cdot(-1)-5\cdot 3=-7-15=-22$

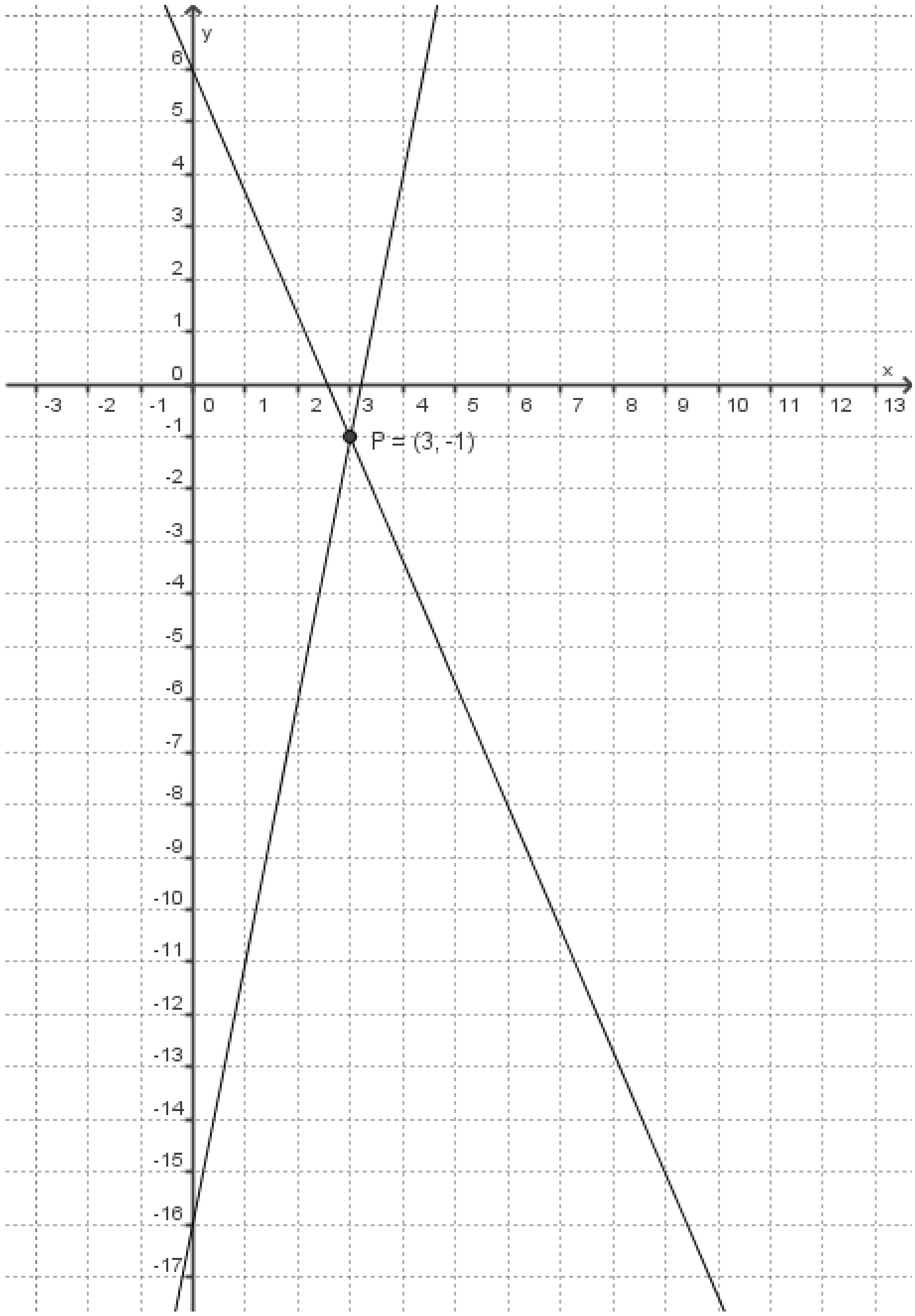
$Dx=\begin{vmatrix} 18 & 3 \\ 16 & -1 \end{vmatrix}=18\cdot(-1)-16\cdot 3=-18-48=-66$

$Dy=\begin{vmatrix} 7 & 18 \\ 5 & 16 \end{vmatrix}=7\cdot 16-5\cdot 18=112-90=+22$

$\begin{cases} x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{-66}{-22}=3 \\ y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{+22}{-22}=-1 \end{cases}$

Metodo di Grafico

$$\begin{cases} 7x + 3y = 18 \\ 5x - y = 16 \end{cases}$$



$$Il\ sistema \quad \begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 6x + 9y = 1 \end{cases} \quad \text{è } impossibile.$$

$$Infatti: \left(\frac{a}{a^I} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{b}{b^I} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \right) \neq \left(\frac{c}{c^I} = \frac{8}{1} = 8 \right)$$

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni con un metodo a tua scelta:

$$\begin{cases} 2x-y=4z+3 \\ 3y-x+z=-10 \\ 3x+2y+2=2z \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x-4z-3 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 3(2x-4z-3)-x+z=-10 \\ 3x+2(2x-4z-3)+2=2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ 6x-12z-9-x+z=-10 \\ 3x+4x-8z-6+2=2z \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 5x-11z=-1 \\ 7x-10z=+4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ x=\dfrac{11}{5}z-\dfrac{1}{5} \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 7\left(\dfrac{11}{5}z-\dfrac{1}{5}\right)-10z=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dfrac{77}{5}z-\dfrac{7}{5}-10z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 77z-7-50z=20 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 27z=27 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ \dots \\ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ x=\dfrac{11}{5}\cdot 1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{10}{5}=2 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2\cdot 2-4\cdot 1-3=-3 \\ x=2 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(5x-3y)-\dfrac{2x-1}{3}=8+\dfrac{1}{2}(6y-5) \\ \dfrac{2x-3}{4}-\dfrac{1-3y}{2}=\dfrac{6y-1}{2}+\dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3(5x-3y)-2(2x-1)=6\cdot 8+3(6y-5) \\ 2x-3-2(1-3y)=2(6y-1)+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15x-9y-4x+2=48+18y-15 \\ 2x-3-2+6y=12y-2+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x-27y=31 \\ 2x-6y=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11x-27y=31 \\ x-3y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ x=3y+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11(3y+3)-27y=31 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} 33y+33-27y=31 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} 6y=-2 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\dfrac{1}{3} \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ x=3\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)+3=-1+3=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=+2 \\ y=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-8y}{x-2}=\dfrac{6x+1}{3x-6}+\dfrac{2(4y-1)}{2-x} \\ \dfrac{3x}{y-1}-1=-\dfrac{6}{1-y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-8y}{x-2}=\dfrac{6x+1}{3(x-2)}+\dfrac{2(4y-1)}{-(x-2)} \\ \dfrac{3x}{y-1}-1=-\dfrac{6}{-(y-1)} \end{cases} \qquad C.E.: x\neq 2\,;\quad y\neq 1$$

$m.c.m.=3(x-2)$

$m.c.m.=y-1$

$$\begin{cases} 3(2x-8y)=6x+1-6(4y-1) \\ 3x-1(y-1)=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x-24y=6x+1-24y+6 \\ 3x-y+1=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=7 \\ 3x-y=5 \end{cases} \qquad \textit{Sistema impossibile}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{a}+\dfrac{x-1}{a-2}=2 \\ \dfrac{x}{a-2}-\dfrac{y}{a-1}=\dfrac{2a-3}{a^2-3a+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2x-y}{a}+\dfrac{x-1}{a-2}=2 \\ \dfrac{x}{a-2}-\dfrac{y}{a-1}=\dfrac{2a-3}{(a-2)(a-1)} \end{cases} \qquad C.E.: a \neq 0; a \neq 1; a \neq 2$$

$$\begin{cases} (a-2)(2x-y)+a(x-1)=2a(a-2) \\ (a-1)x-(a-2)y=2a-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2ax-ay-4x+2y+ax-a=2a^2-4a \\ (a-1)x-(a-2)y=2a-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3ax-4x+2y-ay=2a^2-3a \\ (a-1)x-(a-2)y=2a-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} (3a-4)x-(a-2)y=a(2a-3) \\ (a-1)x-(a-2)y=2a-3 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} (3a-4) & -(a-2) \\ (a-1) & -(a-2) \end{vmatrix} = -(3a-4)(a-2)+(a-1)(a-2) = -3a^2+6a+4a-8+a^2-2a-a+2 =$$

$$= -2a^2+7a-6 = -(a-2)(2a-3)$$

$$D_x=\begin{vmatrix} a(2a-3) & -(a-2) \\ (2a-3) & -(a-2) \end{vmatrix} = -a(2a-3)(a-2)+(2a-3)(a-2) = (a-2)[-a(2a-3)+2a-3] =$$

$$= (a-2)[-2a^2+3a+2a-3] = (a-2)(-2a^2+5a-3) = -(a-2)(a-1)(2a-3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} (3a-4) & a(2a-3) \\ (a-1) & (2a-3) \end{vmatrix} = (3a-4)(2a-3)-a(a-1)(2a-3) = (2a-3)[(3a-4)-a(a-1)] =$$

$$= (2a-3)[3a-4-a^2+a] = (2a-3)[-a^2+4a-4] = -(2a-3)(a-2)^2$$

Discussione

$Se\ D \neq 0, \quad cioè\ se\ \ a \neq 2\ \ e\ \ a \neq \dfrac{3}{2}\ \ il\ sistema\ è\ determinato$ $\begin{cases} x=\dfrac{-(a-2)(a-1)(2a-3)}{-(a-2)(2a-3)}=a-1 \\ y=\dfrac{-(2a-3)(a-2)^2}{-(a-2)(2a-3)}=a-2 \end{cases}$

$Se\ D=0, \quad cioè\ se\ a=2\ \ oppure\ \ a=\dfrac{3}{2}$ si ha:

$Per\ \ a=2\ \ l'equazione\ perde\ di\ significato\ perche\ non\ appartiene\ al\ C.E.$

$Per\ \ a=\dfrac{3}{2}\quad si\ ha$: $\begin{cases} D_x=0 \\ D_y=0 \end{cases}$ $il\ sistema\ è\ indeterminato.$

Riassumendo:

Parametro	**Tipo di sistema**	**Soluzione**
$a=0 \ \vee\ a=1\ \vee\ a=2$	*Equazione che perde di significato*	*Nessuna*
$a\neq 0\ \wedge\ a\neq 1\ \wedge\ a\neq 2\ \wedge\ a\neq \frac{3}{2}$	*Sistema determinato*	$(x=a-1\ ;\ \ y=a-2)$
$a=\frac{3}{2}$	*Sistema indeterminato*	*Infinite soluzioni*

3. *In una prima elementare sono iscritti 18 alunni. Sapendo che alcuni di questi hanno 5 anni e altri 6, e che l'età complessiva degli iscritti è di 100 anni, calcola quanti sono i bambini di 5 anni e quanti di 6 anni.*

Soluzione

Ponendo: N° bambini di 5 anni = x

e N° bambini di 6 anni = y

si ha:

$$\begin{cases} x+y=18 \\ 5x+6y=100 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=18-x \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 5x+6(18-x)=100 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 5x+108-6x=100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ -x=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=18-8=10 \\ x=8 \end{cases}$$

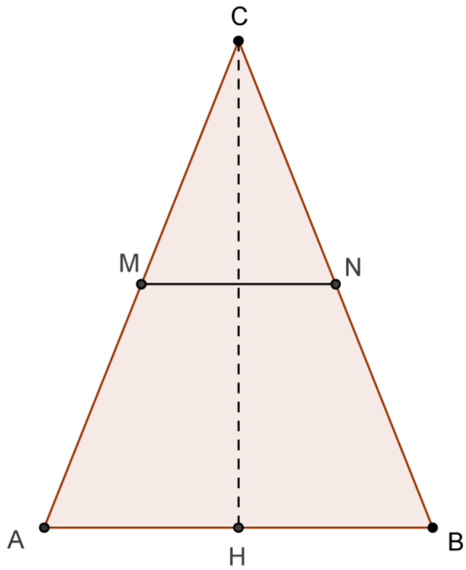
Pertanto i bambini di 5 anni sono 8, mentre i bambini di 6 anni sono 10.

3. *In un triangolo isoscele ABC siano M e N i punti medi dei lati uguali CA e CB. Sapendo che il perimetro del triangolo ABC è 72 cm, mentre il perimetro del trapezio ABNM è 56 cm determina l'area del triangolo ABC.*

Soluzione

Ricordando che:

Il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato ed è congruente alla sua metà,



si deduce che $\overline{AB}=2\,\overline{MN}$

Ponendo: $\overline{AM}=x$ *e* $\overline{MN}=y$

si ha: $\overline{AC}=\overline{BC}=2x$ *e* $\overline{AB}=2y$

$$\begin{cases} \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=72 \\ \overline{AB}+\overline{BN}+\overline{MN}+\overline{AM}=56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y+2x+2x=72 \\ 2y+x+y+x=56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x+2y=72 \\ 2x+3y=56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=36 \\ 2x+3y=56 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=36-2x \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ 2x+3(36-2x)=56 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 2x+108-6x=56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ -4x=56-108 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dots \\ 4x=52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dots \\ x=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=36-2\cdot 13=10 \\ \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} x=13 \\ y=10 \end{cases}$$

Pertanto: $\overline{AB}=20\ cm$ $\quad \overline{AC}=26\ cm$ $\quad \overline{AH}=10\ cm$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{26^2-10^2}=\sqrt{676-100}=\sqrt{576}=24cm$$

$In\ definitiva\ l'area\ del\ triangolo\ ABC\ vale:$ $\quad S=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CH}}{2}=\dfrac{20\cdot 24}{2}=240\ cm^2$.

5. *Dimostra le formule del metodo di Cramer*

$Consideriamo\ il\ sistema$: $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a^I x + b^I y = c^I \end{cases}$

Applicando il metodo di riduzione si ha:

$$\begin{array}{l} b^I \cdot \\ b \cdot \end{array}\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a^I x + b^I y = c^I \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,b^I\,x + b\,b^I y = b^I c \\ b\,a^I x + b\,b^I y = b\,c^I \end{cases} \begin{array}{l} - \\ = \end{array}$$

$$ab^I x - a^I bx = b^I c - bc^I\ ; \qquad (ab^I\ - a^I b)x = b^I c - bc^I; \qquad x = \frac{b^I c - bc^I}{ab^I\ - a^I b}$$

$$\begin{array}{l} a^I \cdot \\ a \cdot \end{array}\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a^I x + b^I y = c^I \end{cases} \qquad \begin{cases} a\,a^I\,x + a^I b\,y = a^I c \\ a\,a^I x + a\,b^I y = a\,c^I \end{cases} \begin{array}{l} - \\ = \end{array}$$

$$a^I b\,y - ab^I y = a^I c - ac^I\ ; \qquad (a^I b\ - ab^I)y = a^I c - ac^I;$$

$$-(ab^I - a^I b\,)y = -(ac^I - a^I c); \qquad y = \frac{ac^I - a^I c}{ab^I - a^I b} \qquad con\ \ ab^I - a^I b \neq 0$$

$Essendo$:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a^I & b^I \end{vmatrix} = ab^I - a^I b\ \ il\ determinante\ della\ matrice\ \ \begin{pmatrix} a & b \\ a^I & b^I \end{pmatrix}$

$Dx = \begin{vmatrix} c & b \\ c^I & b^I \end{vmatrix} = cb^I - c^I b\ \ il\ determinante\ della\ matrice\ \ \begin{pmatrix} c & b \\ c^I & b^I \end{pmatrix}$

$Dy = \begin{vmatrix} a & c \\ a^I & c^I \end{vmatrix} = ac^I - a^I c\ \ il\ determinante\ della\ matrice\ \ \begin{pmatrix} a & c \\ a^I & c^I \end{pmatrix}$

si ricavano le formule:

$$\left(x = \frac{Dx}{D} = \frac{b^I c - bc^I}{ab^I\ - a^I b} \quad ; \quad y = \frac{Dy}{D} = \frac{ac^I - a^I c}{ab^I - a^I b} \right)$$