Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Equazioni nel campo complesso + Geometria 1

23.02.2012

prof. Mimmo Corrado

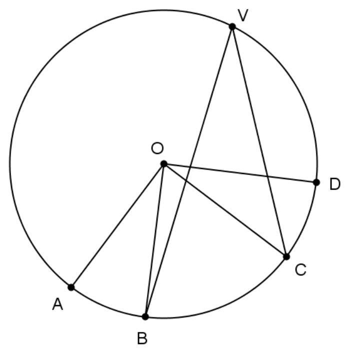
Alunno: ______________________________________ Classe: 2 B

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$x^2 + 4\,x + 5 = 0$	$x^2 + 2\sqrt{6}\,i\,x + 3 = 0$
$x^6 + 7x^3 - 8 = 0$	$x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0$
$3x^5 + 27x = 0$	$x^8 - 17x^4 + 16 = 0$
$x^5 + 4x^3 + x^2 + 4 = 0$	$x^2 - 49i = 0$

2. Semplifica la seguente espressione:

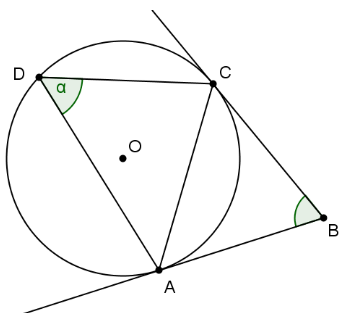
$$\left[(2-3i) : \frac{13}{2+3i} - (4+3i)\cdot\left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\right)\right] : i^{1247403}$$



3. Nella circonferenza a lato, $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D \cong B\hat{V}C = \alpha$.
Quanto misura l'angolo $A\hat{O}D$?

(Progetto pilota INVALSI 2004-05)

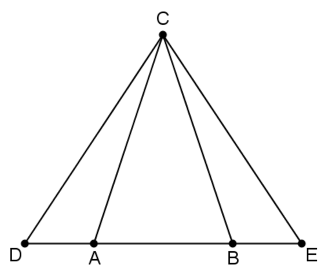
$180° - \alpha$	$90° - \alpha$	3α
4α	$180° - 2\alpha$	



4. Sapendo che l'angolo $A\hat{B}C$ misura 68° , qual è l'ampiezza dell'angolo $A\hat{D}C$:

68°	56°	34°
72°	45°	

(Modello INVALSI)



5. Prolunga la base AB di un triangolo isoscele ABC di due segmenti congruenti AD e BE.
Dimostra che il triangolo DEC che si ottiene è isoscele

6. Nel triangolo rettangolo ABC, sia M il punto medio dell'ipotenusa BC. Dimostra che la mediana AM è metà dell'ipotenusa.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
	Punti	40	8	5	5	10	12	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Determina le soluzioni reali e complesse delle seguenti equazioni:

$\boldsymbol{x^2 + 4\,x + 5 = 0}$

$\frac{\Delta}{4} = 4 - 5 = -1 \qquad x_{1,2} = \boldsymbol{-2 \mp i}$

$\boldsymbol{x^2 + 2\sqrt{6}\,i\,x + 3 = 0}$

$\frac{\Delta}{4} = 6i^2 - 3 = -6 - 3 = -9 \qquad x_{1,2} = -\sqrt{6}\,i \mp \sqrt{-9} = -\sqrt{6}\,i \mp 3\,i = \boldsymbol{\left(-\sqrt{6} \mp 3\right) i}$

$\boldsymbol{x^6 + 7x^3 - 8 = 0}$

Si pone $x^3 = z \quad \Rightarrow \quad z^2 + 7z - 8 = 0$

$\Delta = 49 + 32 = 81 \qquad z_{1,2} = \frac{-7 \mp 9}{2} = \begin{cases} z_1 = -8 & x^3 = -8 \\ z_2 = 1 & x^3 = +1 \end{cases}$

$x^3 = -8\,; \qquad x^3 + 8 = 0\,; \qquad (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \qquad \begin{cases} x + 2 = 0 & x_1 = \boldsymbol{-2} \\ x^2 - 2x + 4 = 0 & x_{2,3} = \boldsymbol{1 \mp \sqrt{3}\,i} \end{cases}$

$x^3 = 1\,; \qquad x^3 - 1 = 0; \quad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \qquad \begin{cases} x - 1 = 0 & x_4 = \boldsymbol{+1} \\ x^2 + x + 1 = 0 & x_{5,6} = \boldsymbol{\frac{-1 \mp \sqrt{3}\,i}{2}} \end{cases}$

$\boldsymbol{x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0}$

$(x+1)(x^2 - 3x + 4) = 0 \qquad \begin{cases} x + 1 = 0 & x_1 = \boldsymbol{-1} \\ x^2 - 3x + 4 = 0 & x_{2,3} = \boldsymbol{\frac{3 \mp \sqrt{7}\,i}{2}} \end{cases}$

$\mathbf{3x^5 + 27x = 0}$

$3x \cdot (x^4 + 9) = 0$;

$3x \cdot [(x^4 + 9 + 6x^2) - 6x^2] = 0$;

$3x \cdot [(x^2 + 3)^2 - 6x^2] = 0$;

$3x \cdot \left[(x^2 + 3) + \sqrt{6}x\right]\left[(x^2 + 3) - \sqrt{6}x\right] = 0$;

$3x = 0$

$x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0$

$x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0$

$3x = 0; \qquad x_1 = \mathbf{0}$

$x^2 + \sqrt{6}x + 3 = 0 \qquad \Delta = 6 - 12 = -6 \qquad x_{2,3} = \dfrac{-\sqrt{6} \mp \sqrt{-6}}{2} = \mathbf{-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \mp \dfrac{\sqrt{6}\,i}{2}}$

$x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0 \qquad \Delta = 6 - 12 = -6 \qquad x_{4,5} = \dfrac{\sqrt{6} \mp \sqrt{-6}}{2} = \mathbf{+\dfrac{\sqrt{6}}{2} \mp \dfrac{\sqrt{6}\,i}{2}}$

$\mathbf{x^8 - 17x^4 + 16 = 0}$

Si pone $x^4 = z \qquad \Rightarrow \qquad z^2 - 17z + 16 = 0$

$\Delta = 289 - 64 = 225 \qquad z_{1,2} = \dfrac{17 \mp 15}{2} =$

$z_1 = 1 \qquad x^4 = 1$

$z_2 = 16 \qquad x^4 = 16$

$x^4 = 1\,; \qquad x^4 - 1 = 0\,; \quad (x^2 + 1)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \mathbf{\mp i}$

$x^2 - 1 = 0 \qquad x_{3,4} = \mathbf{\mp 1}$

$x^4 = 16\,; \qquad x^4 - 16 = 0\,; \qquad (x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0 \qquad x_{5,6} = \mathbf{\mp 2i}$

$x^2 - 4 = 0 \qquad x_{7,8} = \mathbf{\mp 2}$

$\mathbf{x^5 + 4x^3 + x^2 + 4 = 0}$

$x^3(x^2 + 4) + 1(x^2 + 4) = 0$;

$(x^2 + 4)(x^3 + 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 + 4)\,(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0 \qquad x_1 = \mathbf{-1}$

$x^2 + 4 = 0 \qquad x_{2,3} = \mathbf{\mp 2i}$

$x^2 - x + 1 = 0 \qquad x_{4,5} = \mathbf{\dfrac{1 \mp \sqrt{3}\,i}{2}}$

Oppure

$\mathbf{x^5 + 4x^3 + x^2 + 4 = 0}$

$(x + 1)\,(x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x + 1)\,(x^4 - x^3 + 4x^2 + x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x + 1)\,[x^4 + 4x^2 - x^3 - 4x + x^2 + 4] = 0$

$(x + 1)\,[x^2(x^2 + 4) - x(x^2 + 4) + 1(x^2 + 4)] = 0$

$(x^2 + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\boldsymbol{x^2 - 49i = 0}$; $\qquad x^2 = 49i$; $\qquad x = \mp\sqrt{49i}$; $\qquad x = \mp 7\sqrt{i}$

Trasformiamo $\sqrt{i}$ nella forma normale di numero complesso: $a + b\,i$.

$\sqrt{i} = a + b\,i \quad \Leftrightarrow \quad (a + b\,i)^2 = i \quad$ *cioè*: $\quad a^2 + b^2 i^2 + 2abi = i$

$a^2 - b^2 + 2abi = i$ Tale uguaglianza è vera se: $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \mp b \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ -2b^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ b^2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\,i \\ b = \mp\sqrt{-\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\,i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = +b \\ 2ab = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +b \\ 2b^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = +b \\ b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \mp\sqrt{\frac{1}{2}} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Pertanto: $$\sqrt{i} = \left[\begin{array}{l} a + b\,i = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,i + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \cdot i = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a + b\,i = +\frac{\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \cdot i = +\frac{\sqrt{2}}{2}\,i + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a + b\,i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \\ a + b\,i = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \\ \\ \sqrt{i} = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \end{array}$$

Sostituendo: $\sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ in (*) si ha: $x = \mp 7\,\sqrt{i}$

$$x_1 = -7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{7}{2}\sqrt{2} + \frac{7}{2}\sqrt{2}\,i}$$
$$x_2 = +7 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{7}{2}\sqrt{2} - \frac{7}{2}\sqrt{2}\,i}$$

Sostituendo: $\sqrt{i} = +\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$ in (*) si ottengono di nuovo le soluzioni precedenti.

2. Semplifica la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\left[(2 - 3i) : \frac{13}{2 + 3i} - (4 + 3i) \cdot \left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}\,i\right)\right] : i^{1247403}} =$$

$$= \left[(2 - 3i) \cdot \frac{2 + 3i}{13} - \left(\frac{16}{25} - \frac{12}{25}i + \frac{12}{25}i - \frac{9}{25}i^2\right)\right] : (i^{1247400} \cdot i^3) =$$

$$= \left[\frac{4 + 6i - 6i - 9i^2}{13} - \left(\frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right)\right] : i^3 =$$

$$= \left[\frac{4 + 9}{13} - \left(\frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right)\right] : (-i) =$$

$$= \left[\frac{13}{13} - \left(\frac{25}{25}\right)\right] : (-i) =$$

$$= [1 - 1] : (-i) =$$

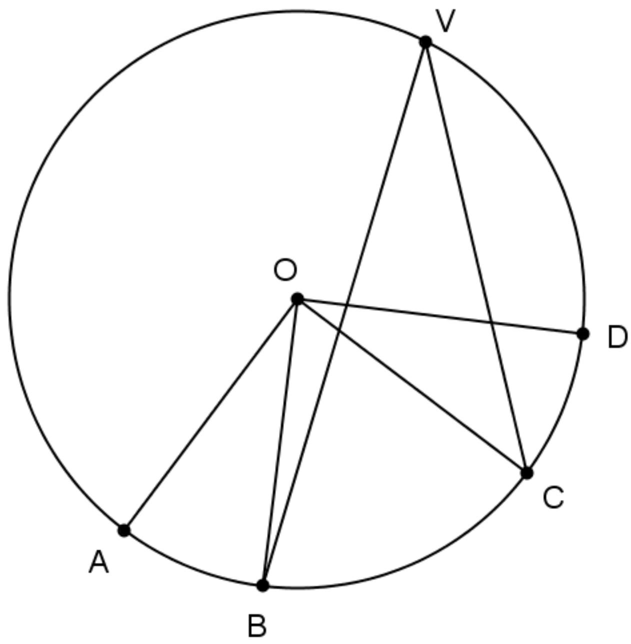
$$= 0 : (-i) = \boldsymbol{0}$$

3. Nella circonferenza a lato, $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D \cong B\hat{V}C = \alpha$.
   Quanto misura l'angolo $A\hat{O}D$?

   <u>Dimostrazione</u>

   $B\widehat{O}C \cong 2B\widehat{V}C = 2\alpha$ perché insistono sullo stesso arco $\widehat{BC}$

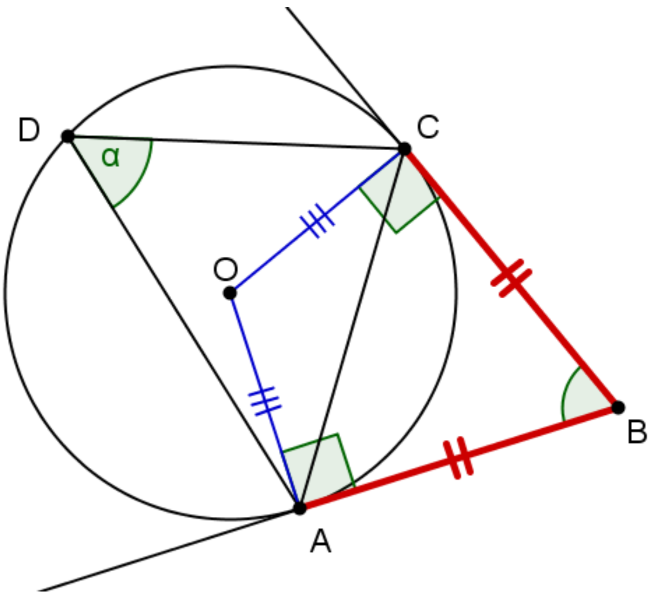
   $A\hat{O}D \cong A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D = \alpha + 2\alpha + \alpha = 4\alpha$



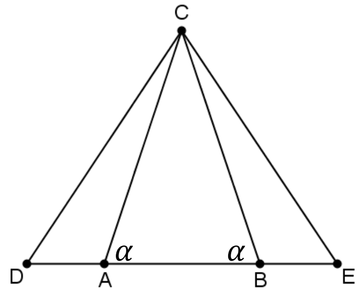
4. Sapendo che l'angolo $A\hat{B}C$ misura 68° , qual è l'ampiezza dell'angolo $A\hat{D}C$:

   <u>Dimostrazione</u>

   Essendo $AB \cong BC \quad \Rightarrow \quad B\widehat{A}C \cong B\widehat{C}A = \frac{180-68}{2} = 56°$
   Essendo $O\widehat{C}B = 90° \quad \Rightarrow \quad O\widehat{C}A \cong O\widehat{A}C = 90° - 56° = 34°$
   Pertanto $A\hat{O}C = 180° - 34° - 34° = 112°$.
   Infine si ha: $A\hat{D}C = \frac{1}{2}A\hat{O}C = \frac{1}{2}112° = 56°$.



5. Prolunga la base AB di un triangolo isoscele ABC di due segmenti congruenti AD e BE. Dimostra che il triangolo DEC che si ottiene è isoscele



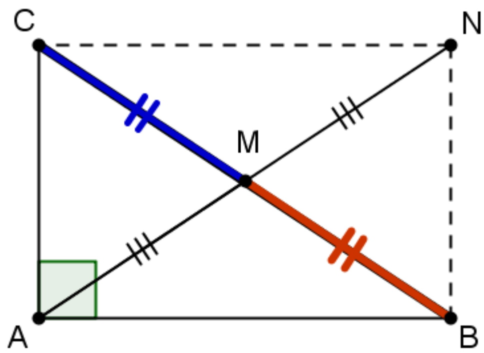
Ipotesi		*Tesi*
$AC \cong BC$ $AD \cong BE$	$\Rightarrow$	$CD = CE$

I triangoli ACD e BCE sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

$\mathrm{AC} \cong \mathrm{BC}$ per ipotesi
$\mathrm{AD} \cong \mathrm{BE}$ per costruzione
$\mathrm{D\widehat{A}C} \cong \mathrm{C\widehat{B}E} = 180 - \alpha$

Pertanto si conclude la tesi, cioè che: $CD \cong CE$.

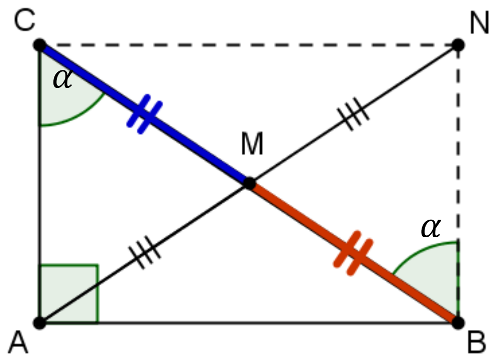
5. Nel triangolo rettangolo ABC, sia M il punto medio dell'ipotenusa BC. Dimostra che la mediana AM è metà dell'ipotenusa.



Ipotesi		*Tesi*
$\hat{A} = 90°$ $CM \cong MB$	$\Rightarrow$	$AM = \frac{1}{2}BC$

Prolunghiamo la mediana di un segmento $\mathrm{MN} \cong \mathrm{AM}$.

Consideriamo i triangoli AMC e MBN . Essi sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli.



Infatti:
$\mathrm{CM} \cong \mathrm{MB}$ per ipotesi
$\mathrm{MN} \cong \mathrm{AM}$ per costruzione
$\mathrm{A\widehat{M}C} \cong \mathrm{B\widehat{M}N}$ perché opposti al vertice.

Pertanto: $\mathrm{AC} \cong \mathrm{BN}$ e $\mathrm{A\widehat{C}M} \cong \mathrm{M\widehat{B}N}$.

Essendo $\mathrm{A\widehat{C}M} \cong \mathrm{M\widehat{B}N}$ angoli alterni interni

$\Rightarrow$ $\mathrm{AC} \;||\; \mathrm{BN}$

$\Rightarrow$ $\mathrm{A\widehat{B}N} = 90°$ $(AB \perp AC \;||\; BN \;\Rightarrow\; AB \perp BN)$

Considerando poi, i triangoli ABC e ABN. Essi sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. Infatti:

AB in comune
$\mathrm{AC} \cong \mathrm{BN}$ per la dimostrazione precedente
$\mathrm{A\widehat{B}N} = 90°$ " " " "

Pertanto: $\mathrm{AN} \cong \mathrm{BC}$

Ma $\mathrm{AN} \cong \mathrm{BC}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}AN \cong \frac{1}{2}BC$ cioè: $AM \cong \frac{1}{2}BC$