Prova di Matematica : La retta + Pitagora e Euclide

29.03.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 B

A. Dato il triangolo di vertici: $A\,(-3;-2)$, $B\,(1;\ 4)$, $C\,(6;-1)$:

1. *determina il perimetro*
2. *determina l'area (senza utilizzare la formula dell'area)*
3. *determina le coordinate dell'ortocentro T*
4. *determina le coordinate del circocentro E*
5. *determina le coordinate del baricentro G (senza utilizzare la formula del baricentro)*
6. *verifica che* $\overline{TG} = 2 \cdot \overline{GE}$ *(proprietà valida per qualsiasi triangolo)*
7. *determina il quarto vertice del parallelogramma, i cui primi tre vertici sono i punti A , B e C*
8. *disegna il triangolo* $A^I B^I C^I$ *simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto* $M(-2;4)$.

B. In un parallelogramma ABCD, sul prolungamento del lato AD scegli un segmento PQ congruente ad AD e sul prolungamento del lato AB segna un segmento MN congruente ad AB. Dimostra che i quadrilateri BCPQ e MNCD sono equivalenti.

C. In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è i $\frac{4}{9}$ *del cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa ha lunghezza 65 cm. Determina il perimetro del triangolo.*

Valutazione	Esercizio	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	B	C	Totale
	Punti	7	8	8	8	8	5	8	8	9	11	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

A. Dato il triangolo di vertici: $A\,(-3;-2)$, $B\,(1;\ 4)$, $C\,(6;-1)$ *determina:*

1. Perimetro

Il perimetro è dato dalla somma dei tre lati:

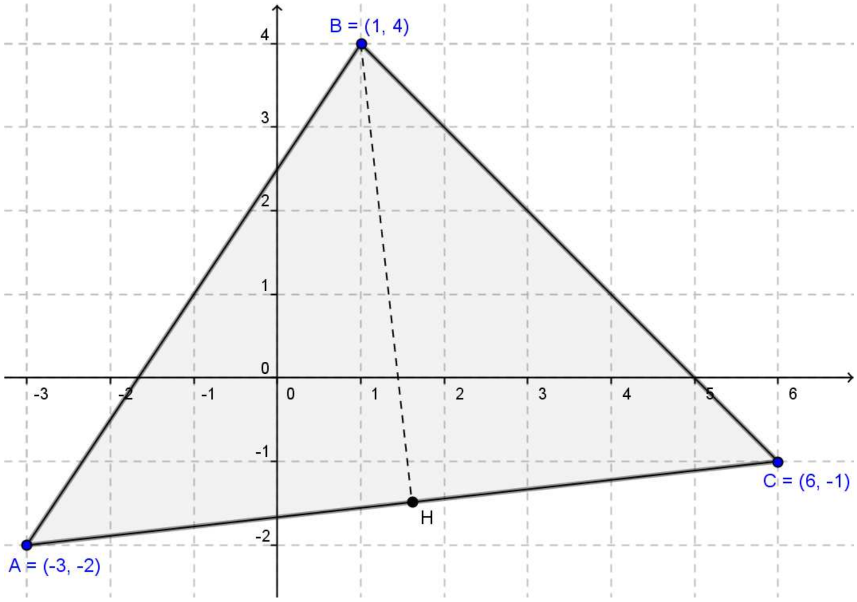
$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-3-6)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

Pertanto il perimetro del triangolo è:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \mathbf{2\sqrt{13} + 5\sqrt{2} + \sqrt{82}}$$



2. Area

Per il calcolo dell'area del triangolo occorre determinare la misura dell'altezza BH.

L'altezza BH rappresenta la distanza del punto B dalla retta AC.

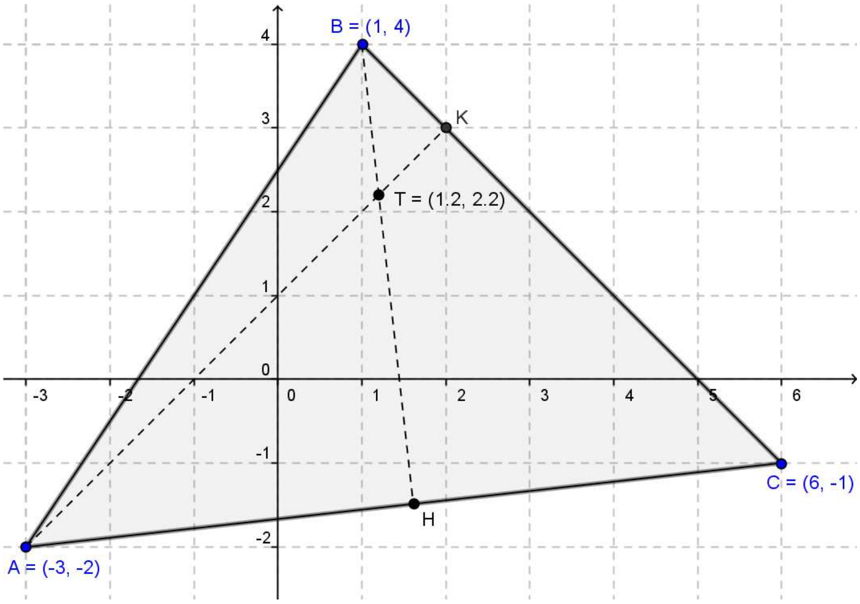
L'equazione della retta AC è data da:

$$\frac{y - y_C}{y_A - y_C} = \frac{x - x_C}{x_A - x_C}\ ; \qquad \frac{y+1}{-2+1} = \frac{x-6}{-3-6}\ ; \qquad \frac{y+1}{-1} = \frac{x-6}{-9}\ ; \qquad 9\cdot(y+1) = x-6\,; \qquad x - 9y - 15 = 0$$

$$L'altezza \quad BH = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1\cdot 1 - 9\cdot 4 - 15|}{\sqrt{1^2 + (-9)^2}} = \frac{|-50|}{\sqrt{82}} = \frac{50}{\sqrt{82}}$$

L'area del triangolo è: $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BH} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{82}\cdot\frac{50}{\sqrt{82}} = \mathbf{25}$.

3. *L'ortocentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre altezze.*



Il coefficiente angolare della retta AC è:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2+1}{-3-6} = \frac{1}{9}$$

La retta BH perpendicolare alla retta AC ha coefficiente angolare: $m_{BH} = -\frac{1}{m_{AC}} = -9$.

L'equazione dell'altezza BH è: $y - y_B = m_{BH}\,(x - x_B)$; $y - 4 = -9\,(x-1)$; $y = -9x + 13$

Il coefficiente angolare della retta BC è:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4+1}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1$$

La retta AK perpendicolare alla retta BC ha coefficiente angolare: $m_{AK} = -\frac{1}{m_{BC}} = +1$.

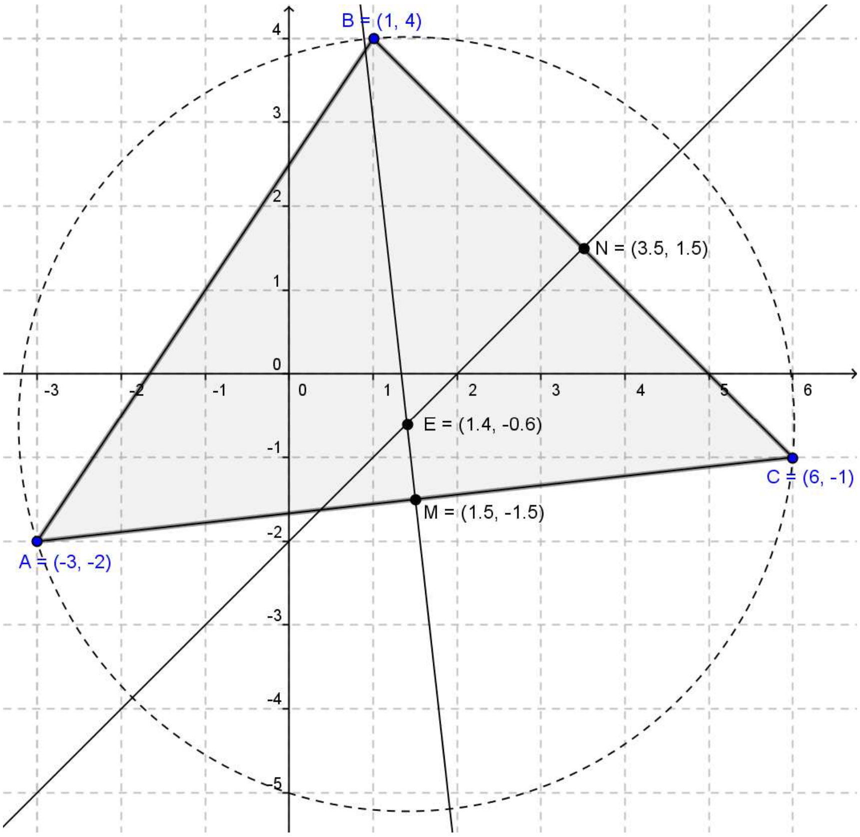
L'equazione dell'altezza AK è: $y - y_A = m_{AK}\,(x - x_A)$; $y + 2 = +1\,(x+3)$; $y = x + 1$

Le coordinate dell'ortocentro T, punto di incontro delle due altezze BH e AK, si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -9x + 13 \\ y = x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 1 = -9x + 13 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x = 12 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ y = \frac{6}{5} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{cases}$$

$Pertanto\ l'ortocentro\ ha\ coordinate$: $\boldsymbol{T\left(\frac{6}{5};\ \frac{11}{5}\right)}$.

4. Il circocentro di un triangolo è il punto d'incontro dei tre assi.



Il punto medio M del lato AC ha coordinate:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad M\left(\frac{3}{2};\, -\frac{3}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare della retta AC è: $m_{AC} = \frac{1}{9}$

L'equazione dell'asse del segmento AC è:

$$y - y_M = -\frac{1}{m_{AC}}\,(x - x_M)\,; \qquad y + \frac{3}{2} = -9\left(x - \frac{3}{2}\right); \qquad y = -9x + 12$$

Il punto medio N del lato BC ha coordinate:

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2} \qquad y_N = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad N\left(\frac{7}{2};\, \frac{3}{2}\right)$$

Il coefficiente angolare della retta BC è: $m_{BC} = -1$

L'equazione dell'asse del segmento BC è:

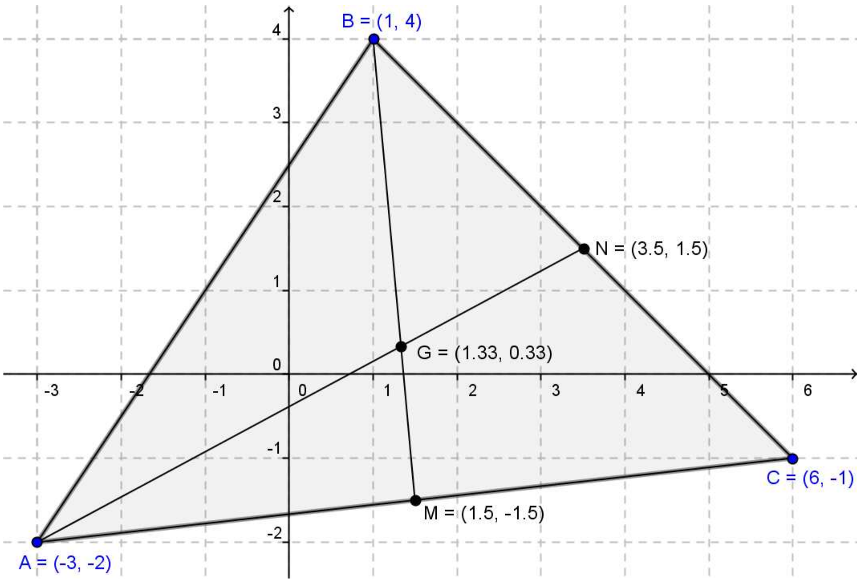
$$y - y_N = -\frac{1}{m_{BC}}\,(x - x_N)\,; \qquad y - \frac{3}{2} = +1\left(x - \frac{7}{2}\right); \qquad y = x - 2$$

Le coordinate del circocentro E, punto di incontro dei due assi, si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -9x + 12 \\ y = x - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2 = -9x + 12 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x = 14 \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{7}{5} - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$Pertanto, il\ circocentro\ ha\ coordinate$: $\boldsymbol{E\left(\frac{7}{5}\,;\, -\frac{3}{5}\right)}$.

5. Il baricentro di un triangolo è il punto d'incontro delle tre mediane.



Il punto medio M del lato AC ha coordinate: $M\left(\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$

L'equazione della mediana BM é:

$$\frac{y-y_M}{y_B-y_M}=\frac{x-x_M}{x_B-x_M}\ ; \qquad \frac{y+\frac{3}{2}}{4+\frac{3}{2}}=\frac{x-\frac{3}{2}}{1-\frac{3}{2}}\ ; \qquad \frac{y+\frac{3}{2}}{\frac{11}{2}}=\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\ ; \qquad \frac{2}{11}\cdot\left(y+\frac{3}{2}\right)=-2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{2}{11}y+\frac{3}{11}=-2x+3\ ; \qquad 2y+3=-22x+33\ ; \qquad 22x+2y-30=0\ ; \qquad 11x+y-15=0$$

Il punto medio N del lato BC ha coordinate: $N\left(\frac{7}{2};\ \frac{3}{2}\right)$

L'equazione della mediana AN è:

$$\frac{y-y_N}{y_A-y_N}=\frac{x-x_N}{x_A-x_N}\ ; \qquad \frac{y-\frac{3}{2}}{-2-\frac{3}{2}}=\frac{x-\frac{7}{2}}{-3-\frac{7}{2}}\ ; \qquad \frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{7}{2}}=\frac{x-\frac{7}{2}}{-\frac{13}{2}} \qquad -\frac{2}{7}\cdot\left(y-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{13}\cdot\left(x-\frac{7}{2}\right)$$

$$-\frac{2}{7}y+\frac{3}{7}=-\frac{2}{13}x+\frac{7}{13}\ ; \qquad \frac{2}{7}y=\frac{2}{13}x+\frac{3}{7}-\frac{7}{13}\ ; \qquad \frac{2}{7}y=\frac{2}{13}x-\frac{10}{91}\ ; \quad y=\frac{7}{13}x-\frac{5}{13}$$

Le coordinate del baricentro G, punto di incontro delle due mediane BM e AN, si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}11x+y-15=0\\ y=\frac{7}{13}x-\frac{5}{13}\end{cases} \qquad \begin{cases}11x+\frac{7}{13}x-\frac{5}{13}-15=0\\ \end{cases} \qquad \begin{cases}11x+7x-\frac{5}{13}-15=0\\ \end{cases}$$

$$\begin{cases}143x+7x-5-195=0\\ \end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{200}{150}=\frac{4}{3}\\ \end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{7}{13}\cdot\frac{4}{3}-\frac{5}{13}=\frac{28}{39}-\frac{5}{13}\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{4}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Pertanto il baricentro ha coordinate: $\boldsymbol{G\left(\frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)}$

Applicando la formula si ottiene lo stesso risultato:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{-3+1+6}{3}=\frac{4}{3}$$
$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=\frac{-2+4-1}{3}=\frac{1}{3}$$

6. Verifica la proprietà: $\overline{TG} = 2 \cdot \overline{EG}$.

$\overline{TG} = 2 \cdot \overline{EG}$;

$\sqrt{(x_T - x_G)^2 + (y_T - y_G)^2} = 2 \cdot \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2}$;

$(x_T - x_G)^2 + (y_T - y_G)^2 = 4 \cdot [(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2]$;

$\left(\frac{6}{5} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 = 4 \cdot \left[\left(\frac{7}{5} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)^2\right]$;

$\left(-\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{28}{15}\right)^2 = 4 \cdot \left[\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(-\frac{14}{15}\right)^2\right]$;

$\frac{4}{225} + \frac{784}{225} = 4 \cdot \left[\frac{1}{225} + \frac{196}{225}\right]$;

$\frac{788}{225} = 4 \cdot \frac{197}{225}$;

$\frac{788}{225} = \frac{788}{225}$.

Oppure

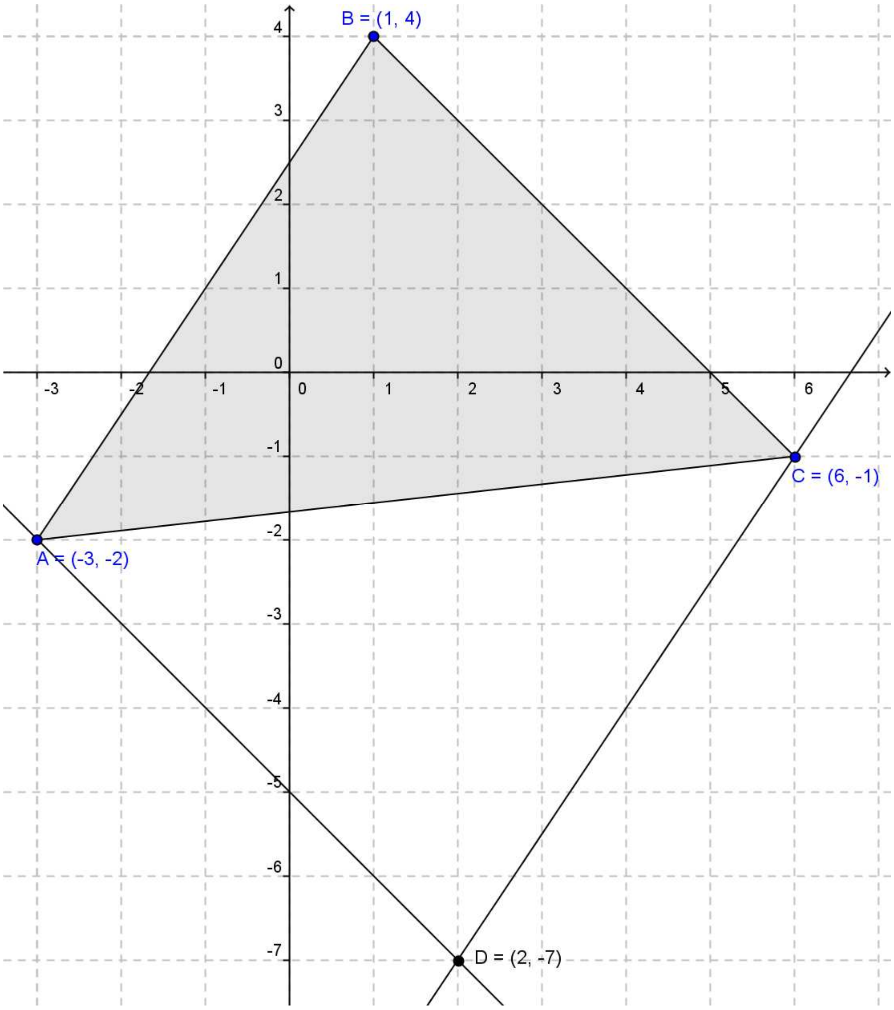
$$\overline{TG} = \sqrt{(x_T - x_G)^2 + (y_T - y_G)^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{5} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{5} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{28}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{784}{225}} = \sqrt{\frac{788}{225}} = \mathbf{2\,\frac{\sqrt{197}}{15}}$$

$$\overline{EG} = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(-\frac{14}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{225} + \frac{196}{225}} = \mathbf{\frac{\sqrt{197}}{15}}$$

7. Per determinare il quarto vertice del parallelogramma occorre trovare le equazioni delle due rette r ed s :

La retta r passante per il punto C e parallela al lato AB

La retta s passante per il punto A e parallela al lato BC



La retta r passante per il punto C e parallela al lato AB ha equazione:

$y - y_C = m_{AB}\,(x - x_C)\,;\qquad y + 1 = \frac{3}{2}\,(x - 6)\,;\qquad y = \frac{3}{2}x - 10$

La retta s passante per il punto A e parallela al lato BC

$y - y_A = m_{BC}\,(x - x_A)\,;\qquad y + 2 = -1\,(x + 3)\,;\qquad y = -x - 5$

Le coordinate del quarto vertice D del parallelogramma si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x - 10 \\ y = -x - 5 \end{cases}\qquad \begin{cases} -x - 5 = \dfrac{3}{2}x - 10 \\ - \end{cases}\qquad \begin{cases} -2x - 10 = 3x - 20 \\ - \end{cases}\qquad \begin{cases} 5x = 10 \\ - \end{cases}\qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D(2;\ -7)}$$

Applicando le formule si ottiene sempre:

$$\begin{matrix} x_D + x_B = x_A + x_C & \quad x_D + 1 = -3 + 6 & \quad x_D = 2 \\ y_D + y_B = y_A + y_C & \quad y_D + 4 = -2 - 1 & \quad y_D = -7 \end{matrix}$$

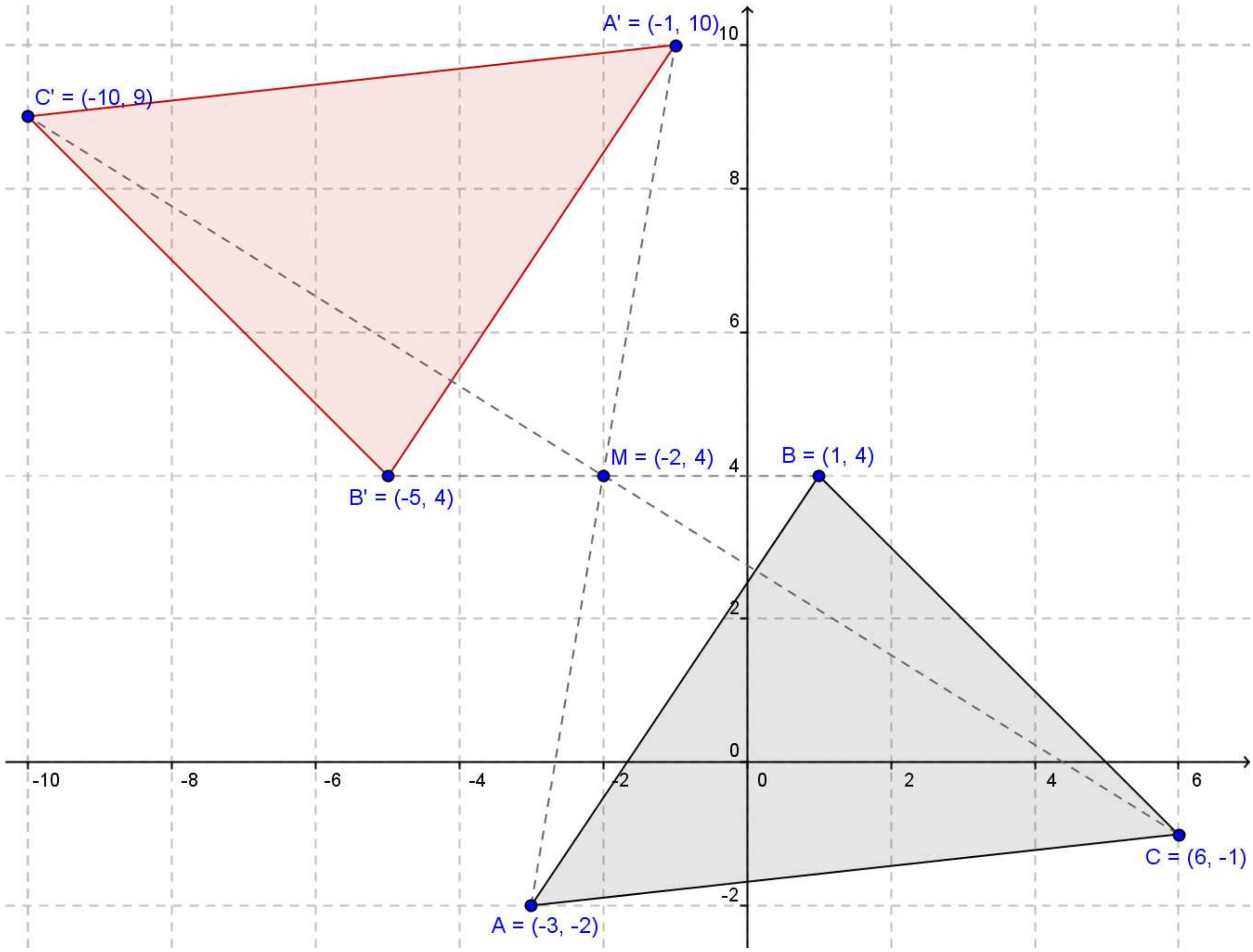
8. *Per determinare il triangolo* $A^I B^I C^I$ *simmetrico del triangolo ABC rispetto al punto* $M(-2;\ 4)$ *occorre utilizzare le equazioni della simmetria centrale.*

Le equazioni della simmetria centrale si ottengono utilizzando le formule del punto medio di un segmento:

$$\begin{cases} x_V = \dfrac{x_A + x_{A^I}}{2} \\ y_V = \dfrac{y_A + y_{A^I}}{2} \end{cases} \qquad da\ \ cui\ \ si\ \ ottengono: \quad \begin{cases} x_{A^I} = 2x_V - x_A \\ y_{A^I} = 2y_V - y_A \end{cases}$$

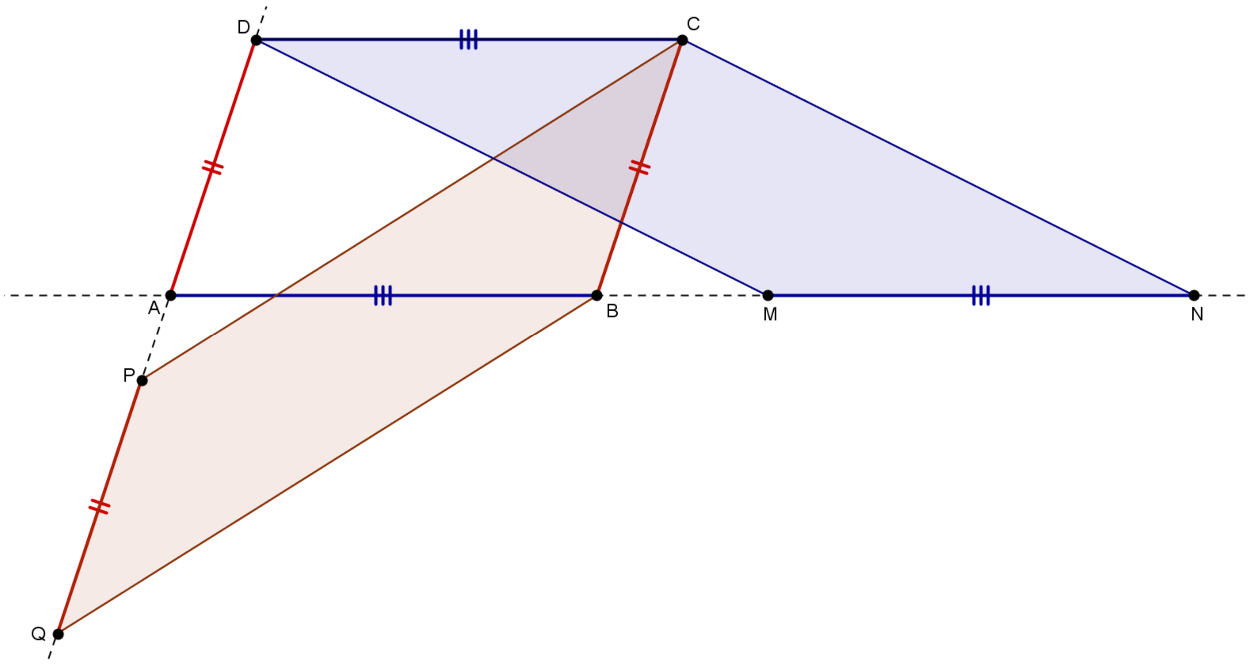
Applicando le equazioni della simmetria centrale si ottengono:

$$\begin{cases} x_{A^I} = 2\cdot(-2) + 3 = -1 \\ y_{A^I} = 2\cdot 4 + 2 = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{B^I} = 2\cdot(-2) - 1 = -5 \\ y_{B^I} = 2\cdot 4 - 4 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{C^I} = 2\cdot(-2) - 6 = -10 \\ y_{C^I} = 2\cdot 4 + 1 = 9 \end{cases}$$



B. *In un parallelogramma ABCD, sul prolungamento del lato AD scegli un segmento PQ congruente ad AD e sul prolungamento del lato AB segna un segmento MN congruente ad AB. Dimostra che i quadrilateri BCPQ e MNCD sono equivalenti.*

IPOTESI		TESI
ABCD è un *parallelogramma* *A, D, P e Q sono allineati* *A, B, M e N sono allineati* $AD \cong PQ$ $AB \cong MN$	$\Rightarrow$	$BCPQ \doteq MNCD$



Il quadrilatero BCPQ è un parallelogrammo perché i lati opposti PQ e BC sono paralleli e congruenti.

I parallelogrammi ABCD e BCPQ sono equivalenti perché hanno le basi AD e PQ congruenti e la medesima altezza, perché entrambi costruiti sulle due rette parallele DQ e BC.

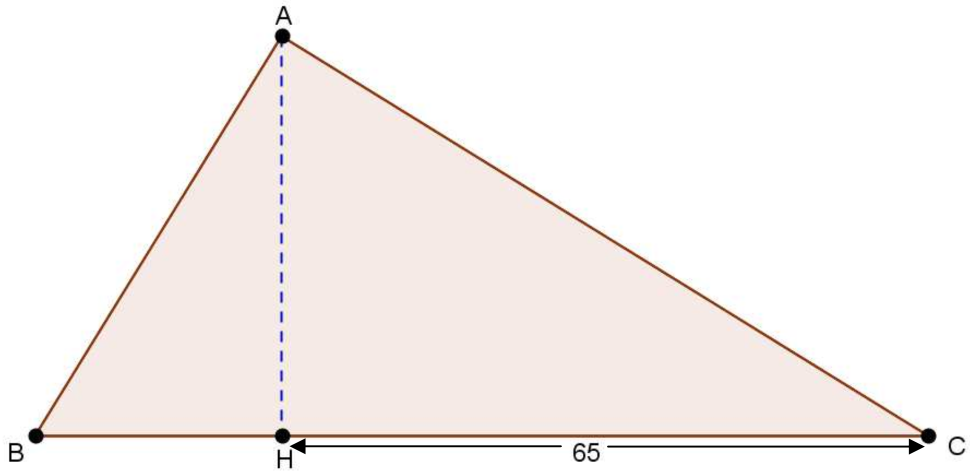
Il quadrilatero MNCD è un parallelogrammo perché i lati opposti MN e DC sono paralleli e congruenti.

I parallelogrammi ABCD e MNCD sono equivalenti perché hanno le basi AB e MN congruenti e la medesima altezza, perché entrambi costruiti sulle due rette parallele AN e DC.

Pertanto, per la proprietà transitiva, si conclude che $BCPQ \doteq MNCD$.

C. In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è i $\frac{4}{9}$ del cateto stesso, mentre la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa ha lunghezza 65 cm. Determina il perimetro del triangolo.

<u>Soluzione</u>



$Ponendo\ \overline{AB} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{BH} = \frac{4}{9}x \qquad e \qquad \overline{BC} = \frac{4}{9}x + 65$

Applicando il I Teorema di Euclide al triangolo ABC si ha:

$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}\ ; \qquad x^2 = \frac{4}{9}x \cdot \left(\frac{4}{9}x + 65\right)\ ; \qquad x^2 = \frac{16}{81}x^2 + \frac{260}{9}x\ ;$

$81x^2 = 16x^2 + 2340x\ ; \quad 65x^2 - 2340x = 0\ ; \quad x^2 - 36x = 0\ ; \quad x \cdot (x - 36) = 0\ ; \quad \begin{matrix} x = 0 & NO \\ x = 36 & SI \end{matrix}$

$Pertanto$: $\overline{AB} = 36\ cm \qquad \overline{BH} = \frac{4}{9} \cdot 36\ cm = 16\ cm \qquad e \qquad \overline{BC} = (16 + 65)\ cm = 81\ cm\,.$

Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{81^2 - 36^2} = \sqrt{6561 - 1296} = \sqrt{5265} = 9\sqrt{65}\ cm$

$Pertanto$ è: $\quad 2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(36 + 81 + 9\sqrt{65}\right) cm = \left(117 + 9\sqrt{65}\right) cm\,.$