Prova di Matematica : Radicali + Trigonometria

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 B

24.11.2011
prof. Mimmo Corrado

1. Scrivi i primi 5 termini delle classi contigue di numeri che hanno come elemento di separazione il numero $3\sqrt{5}-2$.

2. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $\sqrt{20}$.

3. Dimostra che $\sqrt{7}$ è un numero irrazionale.

4. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad 2\sqrt{8}-3\sqrt{18}+5\sqrt{12}-\sqrt{200}+\frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{9x^5-18x^4}+\sqrt{4x-8}-3\sqrt{x^3-8-6x^2+12x} \qquad \left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2}-\frac{15}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\sqrt[4]{16a^2+32a+16} \qquad \sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+a-2}}:\sqrt[3]{\frac{a^2-4}{a+1}}\cdot\sqrt[6]{\frac{a+2}{a^2+2a+1}}$$

5. Semplifica la seguente espressione: $\dfrac{\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^3}}$ con $a\geq 0$,
   I. utilizzando le operazioni e le proprietà dei radicali
   II. utilizzando le operazioni e le proprietà degli esponenti frazionari

   Verifica l'uguaglianza dei due risultati, trasformando il primo in quello equivalente contenente esponenti frazionari.

6. Determina l'area di un rombo, sapendo che il rapporto tra le diagonali e uguale a 2 e la misura della diagonale minore, in cm, è la soluzione dell'equazione

$$\frac{\mathrm{x}-\sqrt{3}}{\mathrm{x}-\sqrt{2}}-\frac{2}{2-\mathrm{x}^2}=\frac{\mathrm{x}+\sqrt{3}}{\mathrm{x}+\sqrt{2}}$$

7. Calcola il valore della seguente espressione: $tg(90°-\alpha)\cdot tg\alpha-\dfrac{sen(180°+\alpha)}{cos(180°-\alpha)}+cotg(90°-\alpha)$

8. Verifica la seguente identità: $\dfrac{sen^3x-senx}{cosx}+\dfrac{2senx}{cosx}+\dfrac{1-cos^2x}{tgx}=2tgx$

9. In un triangolo rettangolo le misure dell'ipotenusa e di un cateto sono $a=50\ cm$ e $b=21{,}13\ cm$. Calcolare la misura dell'altro cateto e le ampiezze degli angoli interni.

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Totale
	Punti	4	4	8	5 x 6	8	8	6	6	6	80

Punti	0 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35	36 - 40	41 - 45	46 - 50	51 - 55	56 - 60	61 - 65	66 - 70	71 - 75	76 - 80
Voto	2	2½	3	3 ½	4	4 ½	5	5½	6	6 ½	7	7 ½	8	8 ½	9	10

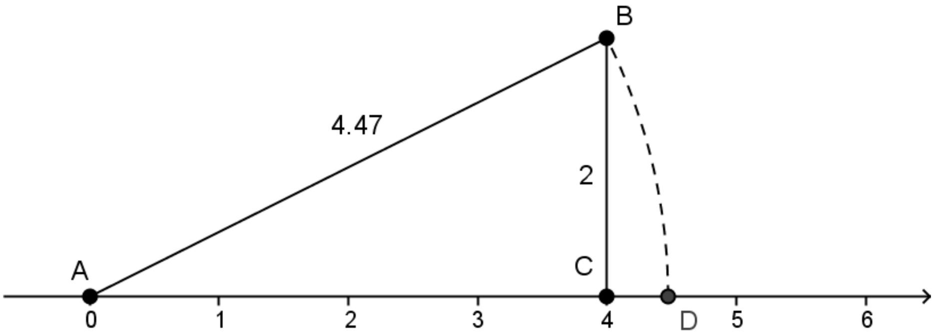
Soluzione

1. Scrivi i primi 5 termini delle classi contigue di numeri che hanno come elemento di separazione il numero $3\sqrt{5}-2$.

   $3\sqrt{5}-2 \approx 4{,}708203932$.

   $D=\{4\,;\ 4{,}7\,;\ 4{,}70\,;\ 4{,}708\,;\ 4{,}7082\,\}$
   $E=\{5\,;\ 4{,}8\,;\ 4{,}71\,;\ 4{,}709\,;\ 4{,}7083\,\}$

2. Usando soltanto la riga e il compasso, rappresenta sulla retta reale il numero irrazionale $\sqrt{20}$.



3. Dimostra che $\sqrt{7}$ è un numero irrazionale.

   <u>*Dimostrazione*</u>

   $Supponiamo\ per\ assurdo\ che\ \sqrt{7}\ sia\ un\ numero\ razionale,\quad cioè\ che:\ \sqrt{7}=\dfrac{a}{b}\quad con\ a\ e\ b\ primi\ tra\ loro\ .$

   $\dfrac{a}{b}=\sqrt{7}\quad\Rightarrow\quad\left(\dfrac{a}{b}\right)^2=7\quad\Leftrightarrow\quad\dfrac{a^2}{b^2}=7\quad\Leftrightarrow\quad a^2=7\cdot b^2\ \ (*)\quad\Rightarrow\quad a^2\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7$

   $Ma\ se\ \ a^2\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7\quad\Rightarrow\quad a\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7\ .$

   $Ma\ se\ \ a\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7\ \ si\ puo\ scrivere\ \ a=7\cdot k\ \ .$

   $Sostituendo\ tale\ espressione\ nell'equazione\ (*)\ si\ ottiene:$

   $a^2=7\cdot b^2\ ;\quad(7k)^2=7\cdot b^2\ ;\quad 49k^2=7\cdot b^2\ ;\quad 7k^2=b^2$

   $7k^2=b^2\quad\Leftrightarrow\quad b^2\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7\ .$

   $Ma\ se\ \ b^2\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7\quad\Rightarrow\quad b\ \text{è}\ multiplo\ di\ 7\quad e\ \ si\ può\ scrivere\ \ b=7h\ .$

   $Pertanto\ si\ ottiene:\ \ \dfrac{a}{b}=\dfrac{7k}{7h}\quad ma\ ciò\ \text{è}\ un\ assurdo.$

   $Infatti, per\ ipotesi\ a\ e\ b\ erano\ primi\ tra\ loro, invece\ in\ questa\ uguaglianza\ sono\ entrambi\ divisibili\ per\ 7,$

   $e\ quindi\ non\ primi.$

4. Semplifica le seguenti espressioni, supponendo verificate le condizioni di esistenza:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=$$
$$=1+2+2\sqrt{2}+\sqrt{2}+2+2-1=$$
$$=6+3\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{8}-3\sqrt{18}+5\sqrt{12}-\sqrt{200}+\frac{6}{\sqrt{2}}=$$

$$=\ 2\cdot 2\sqrt{2}-3\cdot 3\sqrt{2}+5\cdot 2\sqrt{3}-10\sqrt{2}+\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$$

$$=\ 4\sqrt{2}-9\sqrt{2}+10\sqrt{3}-10\sqrt{2}+\frac{6\sqrt{2}}{2}=$$

$$=\ 4\sqrt{2}-9\sqrt{2}+10\sqrt{3}-10\sqrt{2}+3\sqrt{2}=$$

$$=\ 10\sqrt{3}-12\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9x^5-18x^4}+\sqrt{4x-8}-3\sqrt{x^3-8-6x^2+12x}$$

$$=\ \sqrt{9x^4(x-2)}+\sqrt{4(x-2)}-3\sqrt{(x-2)^3}=$$

$$=\ 3x^2\sqrt{x-2}+2\sqrt{x-2}-3(x-2)\sqrt{x-2}\ =$$

$$=\ (3x^2+2-3x+6)\sqrt{x-2}\ =$$

$$=\ (3x^2-3x+8)\sqrt{x-2}\,.$$

$$\left(2\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2}-\frac{15}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}-4\sqrt{2}\right)\ =$$

$$=\ 12+50-20\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+2}\cdot\frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-2}-15+60\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ =$$

$$=\ 62-20\sqrt{6}-\frac{2\sqrt{12}-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{8-4}-15+60\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\ =$$

$$=\ 62-20\sqrt{6}-\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{4}-15+60\frac{\sqrt{6}}{3}\ =$$

$$=\ 62-20\sqrt{6}-\frac{2\sqrt{3}}{4}-15+20\sqrt{6}\quad=\quad 47-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\sqrt[4]{16a^2+32a+16} =$$

$$= \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)}-\sqrt[4]{16\cdot(a+1)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}}{\left(\sqrt{a+1}\right)^2-\left(\sqrt{a}\right)^2}-2\sqrt{a+1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{a+1}}{a+1-a}-2\sqrt{a+1} =$$

$$= 2\sqrt{a+1}-2\sqrt{a+1} =$$

$$= 0$$

$$\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+a-2}} : \sqrt[3]{\frac{a^2-4}{a+1}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a+2}{a^2+2a+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)(a+2)}} : \sqrt[3]{\frac{(a+2)(a-2)}{a+1}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a+2}{(a+1)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+1}{a+2}} : \sqrt[3]{\frac{(a+2)(a-2)}{a+1}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a+2}{(a+1)^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{(a+1)^3}{(a+2)^3}} : \sqrt[6]{\frac{(a+2)^2(a-2)^2}{(a+1)^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a+2}{(a+1)^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{(a+1)^3}{(a+2)^3}\cdot\frac{(a+1)^2}{(a+2)^2(a-2)^2}\cdot\frac{a+2}{(a+1)^2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{(a+1)^3}{(a+2)^4\cdot(a-2)^2}} \quad .$$

5. Semplifica la seguente espressione: $\dfrac{\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^3}}$ con $a \geq 0$

a. utilizzando le operazioni e le proprietà dei radicali
b. trasformandola in una espressione con esponenti frazionari
c. Verifica l'uguaglianza dei due risultati ottenuti, trasformando il primo risultato in una espressione con esponenti frazionari.

Soluzione a

$$\frac{\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6\cdot a^2}}}{\sqrt[12]{a^{10}}\cdot\sqrt[12]{a^9}} = \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^8}}}{\sqrt[12]{a^{10}\cdot a^9}} = \frac{\sqrt[15]{a^8}}{\sqrt[12]{a^{19}}} = \frac{\sqrt[60]{a^{32}}}{\sqrt[60]{a^{95}}} = \sqrt[60]{\frac{a^{32}}{a^{95}}} = \sqrt[60]{\frac{1}{a^{63}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[60]{a^{63}}} = \frac{1}{a\sqrt[60]{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt[20]{a}}.$$

Soluzione *b*

$$\frac{\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^2\cdot a^{\frac{2}{3}}}}{a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{\frac{3}{4}}} = \frac{\left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}}{a^{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{8}{15}}}{a^{\frac{19}{12}}} = a^{\frac{8}{15}-\frac{19}{12}} = a^{\frac{32-95}{60}} = a^{-\frac{63}{60}} = a^{-\frac{21}{20}}.$$

Soluzione *c*

$$\frac{1}{a\sqrt[20]{a}} = \frac{1}{a\cdot a^{\frac{1}{20}}} = \frac{1}{a^{\frac{21}{20}}} = a^{-\frac{21}{20}}.$$

6. Determina l'area di un rombo, sapendo che il rapporto tra le diagonali uguale a 2 e la misura della diagonale minore, in cm, è la soluzione dell'equazione

$$\frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-x^2} = \frac{x+\sqrt{3}}{x+\sqrt{2}}$$

Soluzione

$$\frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}} - \frac{2}{2-x^2} = \frac{x+\sqrt{3}}{x+\sqrt{2}} \qquad \frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}} - \frac{2}{-(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} = \frac{x+\sqrt{3}}{x+\sqrt{2}} \qquad C.E.:\ x \neq \pm\sqrt{2}$$

$$\frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}} + \frac{2}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} = \frac{x+\sqrt{3}}{x+\sqrt{2}} \qquad (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3}) + 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{3})$$

$$x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2}x - \sqrt{6} + 2 = x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{2}x - \sqrt{6} \qquad -\sqrt{3}x + \sqrt{2}x + 2 = +\sqrt{3}x - \sqrt{2}x$$

$$-2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}x = -2 \qquad 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}x = 2$$

$$x = \frac{2}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \frac{2}{2\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Quindi: $d_2 = (\sqrt{3}+\sqrt{2})\ cm$ *mentre* $d_1 = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})\ cm$. *Pertanto l'area del rombo vale:*

$$S = \frac{1}{2}d_1\cdot d_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})\ cm^2 = (3+\sqrt{6}+\sqrt{6}+2)\ cm^2 = (5+2\sqrt{6})\ cm^2.$$

7. Calcola il valore della seguente espressione:

$$tg(90° - \alpha) \cdot tg\alpha - \frac{sen(180° + \alpha)}{cos(180° - \alpha)} + cotg(90° - \alpha) \ =$$

$$= \ cotg\alpha \cdot tg\alpha - \frac{-sen\alpha}{-cos\alpha} + tg\alpha \ =$$

$$= \ \frac{1}{tg\alpha} \cdot tg\alpha - tg\alpha + tg\alpha \ =$$

$$= \ 1 \ .$$

8. Verifica la seguente identità:

$$\frac{sen^3x - senx}{cosx} + \frac{2senx}{cosx} + \frac{1 - cos^2x}{tgx} = 2tgx$$

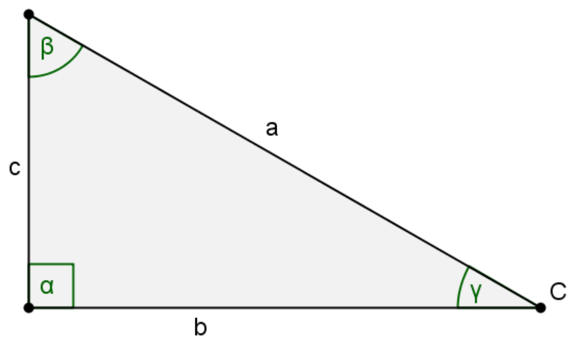
$$\frac{-senx(1 - sen^2x)}{cosx} + \frac{2senx}{cosx} + sen^2x \cdot \frac{cosx}{senx} = 2tgx$$

$$\frac{-senx \cdot cos^2x}{cosx} + \frac{2senx}{cosx} + sen^2x \cdot \frac{cosx}{senx} = 2tgx$$

$$-senx \cdot cosx + \frac{2senx}{cosx} + senx \cdot cosx = 2tgx$$

$$2tgx \ = 2tgx \ .$$

9. In un triangolo rettangolo le misure dell'ipotenusa e di un cateto sono $a = 50\ cm$ e $b = 21,13\ cm$.
Calcolare la misura dell'altro cateto e le ampiezze degli angoli interni.



Soluzione

$sen\ \beta = \frac{b}{a}$; $\qquad sen\ \beta = \frac{21,13}{50}$;

$sen\ \beta = 0,4226$; $\qquad \beta \cong 25°$.

$\gamma = 90° - \beta = 90° - 25° = 65°$.

$cos\ \beta = \frac{c}{a}$; $\qquad cos\ 25° = \frac{c}{50}$; $\qquad 0,9063 = \frac{c}{50}$; $\qquad c = 0,9063 \cdot 50 \cong 45,3\ cm$.