Liceo Scientifico “G. Galilei” Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Sistemi + Geometria

07.06.2012

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 2 B

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni :

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{x-y}{2}+3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=0 \\ xy+y^2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-2xy=0 \\ 2x^2+xy+y^2=44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3y^2+1}{x^2}=4 \\ \dfrac{2x-3y+5}{x+y}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+x+y=32 \\ x^2-y^2+x-y=28 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y=5-3z \\ x+3y-2z=-1 \\ 4x^2-3y^2+z^2=1 \end{cases}$$

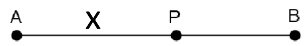
2. Risolvi le seguenti equazioni irrazionali :

$$2x=7-\sqrt{x^2+5} \qquad \sqrt{9x^2+4}-\sqrt{4-6x}=3x \qquad \sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}-\frac{21}{\sqrt{2x+1}}=0$$

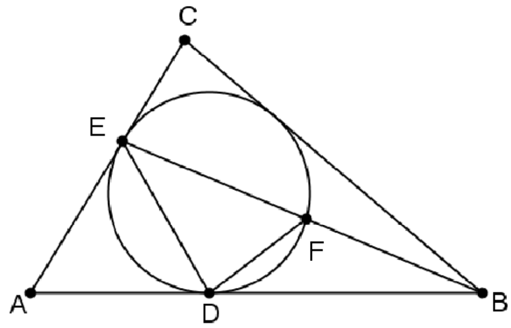
3. Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali :

$$\sqrt{x^2-x-6}-1<\frac{1}{2}x \qquad \sqrt{x^2+4}+x^2>(x+1)(x+2) \qquad \sqrt[3]{2x^3-3x^2-x-1}+1\geq x$$

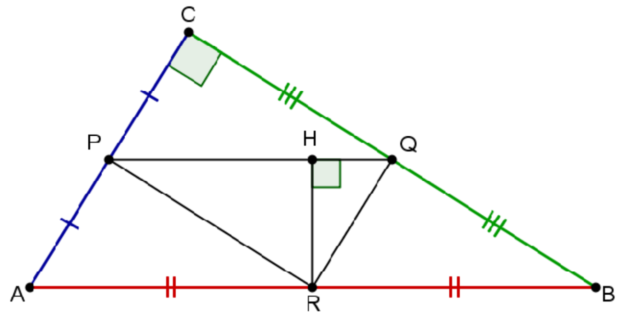
4. Dividi il segmento AB di lunghezza ℓ in due parti AP e PB, in modo che la parte maggiore AP sia media proporzionale tra l'intero segmento AB e la restante parte PB. Determina la misura del segmento AP. *(AP è detta sezione aurea del segmento AB).*



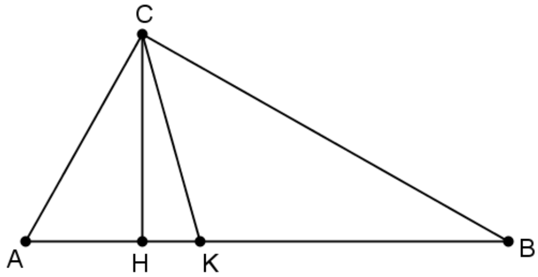
5. Un triangolo ABC è circoscritto ad una circonferenza. Indicati con D ed E i punti di contatto dei lati AB e AC con la circonferenza, e indicato con F l'ulteriore punto di contatto del segmento BE con la circonferenza, dimostra che i triangoli BDE e BDF sono simili.



6. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{AB}=30\ cm$, calcola l'area del triangolo rettangolo PRH, sapendo che $\overline{BQ}=12\ cm$ e i punti P, Q e R sono i punti medi dei lati del triangolo ABC.



7. In un triangolo rettangolo ABC , l'ipotenusa $\overline{AB}=40\ cm$ e il cateto $\overline{AC}=24\ cm$. Sia CH l'altezza relativa all'ipotenusa AB e CK la bisettrice dell'angolo retto $\hat{C}$. Calcola l'area del triangolo CHK.



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	Totale
	Punti	24	12	12	6	6	10	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Risolvi i seguenti sistemi di equazioni :

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{x-y}{2}+3 \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \qquad \left[(3;1)\,,\left(-\frac{9}{5}\,;\,\frac{13}{5}\right)\right]$$

$$\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=0 \\ xy+y^2=0 \end{cases} \qquad [(\alpha;\,-\alpha)]$$

$$\begin{cases} x^2-2xy=0 \\ 2x^2+xy+y^2=44 \end{cases} \qquad \left[\left(0;\,\mp 2\sqrt{11}\right),(\mp 4;\mp 2)\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{3y^2+1}{x^2}=4 \\ \dfrac{2x-3y+5}{x+y}=0 \end{cases} \qquad \left[\left(\frac{7}{2};4\right)\right]$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32 \\ x^2-y^2+x-y=28 \end{cases} \qquad [(5;\,-2)\,,(5;1)\,,(-6;\,-2)\,,(-6;1)]$$

$$\begin{cases} 2x-y=5-3z \\ x+3y-2z=-1 \\ 4x^2-3y^2+z^2=1 \end{cases} \qquad [(-1;2;3\,),\ (0;1;2)]$$

2. Risolvi le seguenti equazioni irrazionali :

$$2x=7-\sqrt{x^2+5} \qquad [x=2]$$

$$\sqrt{9x^2+4}-\sqrt{4-6x}=3x \qquad \left[x=0\,;\ \ x=\frac{1}{2}\right]$$

$$\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x}-\frac{21}{\sqrt{2x+1}}=0 \qquad [x=4]$$

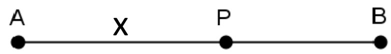
3. Risolvi le seguenti disequazioni irrazionali :

$$\sqrt{x^2-x-6}-1<\frac{1}{2}x \qquad \left[3\le x<\frac{14}{3}\right]$$

$$\sqrt{x^2+4}+x^2>(x+1)(x+2) \qquad [x<0]$$

$$\sqrt[3]{2x^3-3x^2-x-1}\ +1\ge x \qquad [-2\le x\le 0 \quad \vee \quad x\ge 2\,]$$

4. Dividi il segmento AB di lunghezza ℓ in due parti AP e PB, in modo che la parte maggiore AP sia media proporzionale tra l'intero segmento AB e la restante parte PB. Determina la misura del segmento AP .
(AP è detta sezione aurea del segmento AB).



Soluzione

Esplicitando la traccia si ha: $AB : AP = AP : PB$

Ponendo $\overline{AP} = x$ si ha: $\overline{PB} = l - x$ $\Rightarrow$

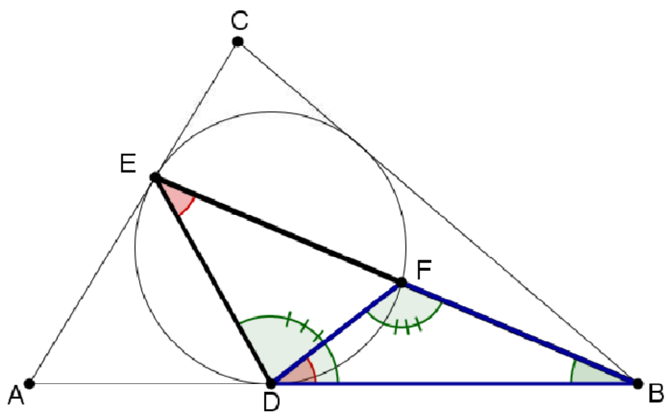
$l : x = x : (l - x)$; $x^2 = l \cdot (l - x)$; $x^2 + lx - l^2 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-l \mp \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = \frac{-l \mp \sqrt{5l^2}}{2} = \quad x_1 = \frac{-l - l\sqrt{5}}{2} \qquad x_1 = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2}$$

Scartando la soluzione negativa si ha:

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot l$$

5. Un triangolo ABC è circoscritto ad una circonferenza. Indicati con D ed E i punti di contatto dei lati AB e AC con la circonferenza, e indicato con F l'ulteriore punto di contatto del segmento BE con la circonferenza, dimostra che i triangoli BDE e BDF sono simili.



Soluzione 1

I triangoli BDE e BDF sono simili per il II criterio di similitudine. Infatti:

$EB : DB = DB : FB$ per il teorema della tangente

$\hat{B}$ in comune

Soluzione 2

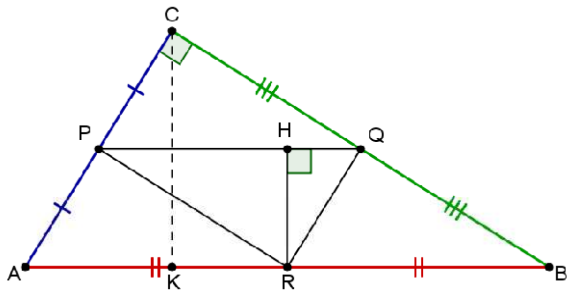
I triangoli BDE e BDF sono simili per il I criterio di similitudine. Infatti:

$F\hat{D}B \cong D\hat{E}F$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco DF

$\hat{B}$ in comune

$D\hat{F}B \cong E\hat{D}B$ perché supplementari degli altri due angoli congruenti

6. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{AB} = 30$ cm, calcola l'area del triangolo rettangolo PRH, sapendo che $\overline{BQ} = 12$ cm e i punti P, Q e R sono i punti medi dei lati del triangolo ABC.



Soluzione 1

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{30^2 - 24^2}\ cm = \sqrt{900 - 576}\ cm = \sqrt{324}\ cm = 18\ cm \quad \Rightarrow \quad \overline{PC} = \overline{AP} = \frac{\overline{AC}}{2} = 9\ cm.$$

L'altezza $\overline{CK} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{18 \cdot 24}{30}\ cm = \dfrac{72}{5}\ cm.$

I triangoli ABC e PQC sono simili per il II criterio di similitudine dei triangoli. Infatti:

l'angolo $\hat{C}$ è in comune
$\overline{AC} = 2\,\overline{PC}$ per ipotesi
$\overline{BC} = 2\,\overline{CQ}$ per ipotesi

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} : \overline{PQ} = \overline{BC} : \overline{CQ} \qquad 30 : \overline{PQ} = 24 : 12 \qquad \overline{PQ} = \frac{30 \cdot 12}{24}\ cm = 15\ cm\,.$$

Per il T. di Talete $PQ \parallel AB \quad \Rightarrow \quad A\hat{R}P \cong R\hat{P}Q$ e $\overline{HR} = \frac{\overline{CK}}{2} = \frac{36}{5}\ cm.$

Inoltre i triangoli ARP e PQC sono congruenti per il I criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

$\overline{AP} = \overline{PC}$ per ipotesi
$\overline{PQ} = \overline{AR}$ per la dimostrazione precedente
$R\hat{A}P \cong Q\hat{P}C$ perché corrispondenti . . .

$$\Rightarrow \quad A\hat{P}R \cong \hat{C} \cong 90°$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo APR si ha:

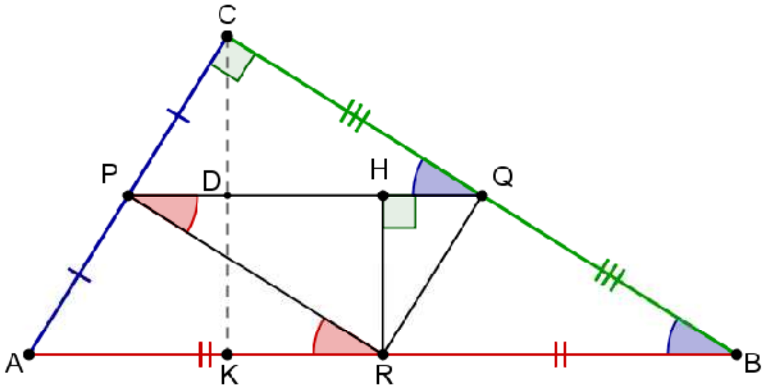
$$\overline{PR} = \sqrt{\overline{AR}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{15^2 - 9^2}\ cm = \sqrt{225 - 81}\ cm = \sqrt{144}\ cm = 12\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo PRH si ha:

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{HR}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{144 - \frac{1296}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{3600-1296}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{2304}{25}}\ cm = \frac{48}{5}\ cm\,.$$

$$S_{PRH} = \frac{1}{2}\,\overline{PH} \cdot \overline{HR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{36}{5} = \frac{864}{25}\ cm^2\,.$$

6. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa $\overline{AB} = 30$ cm, calcola l'area del triangolo rettangolo PRH, sapendo che $\overline{BQ} = 12$ cm e i punti P, Q e R sono i punti medi dei lati del triangolo ABC.



Soluzione 2

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{30^2 - 24^2}\ cm = \sqrt{900 - 576}\ cm = \sqrt{324}\ cm = 18\ cm$$

L'altezza $\overline{CK} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = \dfrac{18 \cdot 24}{30}\ cm = \dfrac{72}{5}\ cm.$

Per il T. di Talete $PQ \parallel AB \quad \Rightarrow \quad P\hat{Q}C \cong \hat{B}$ e $\overline{HR} = \overline{DK} = \frac{\overline{CK}}{2} = \frac{36}{5}\ cm$

Per il T. di Talete $PR \parallel BC \quad \Rightarrow \quad P\hat{Q}C \cong R\hat{P}Q \quad \Rightarrow$ per la p. transitiva $\hat{B} \cong R\hat{P}Q$

Inoltre i triangoli ABC e PHR sono simili per il I criterio di similitudine dei triangoli. Infatti:

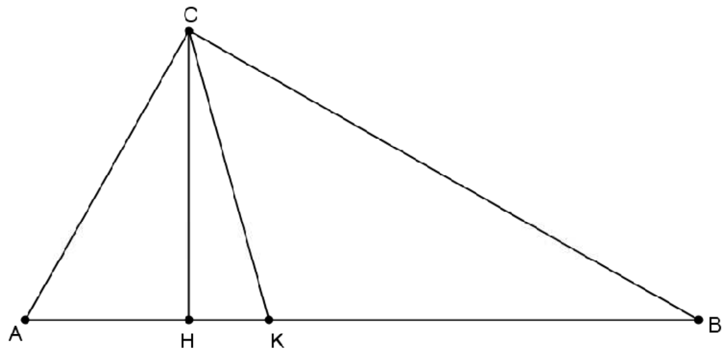
$\hat{C} \cong P\hat{H}R \cong 90°$

$\hat{B} \cong R\hat{P}Q$ per la dimostrazione precedente

$\Rightarrow \quad \overline{HR} : \overline{AC} = \overline{PH} : \overline{BC} \qquad \dfrac{36}{5} : 18 = \overline{PH} : 24 \qquad \overline{PH} = \dfrac{36}{5} \cdot 24 \cdot \dfrac{1}{18}\ cm = \dfrac{48}{5}\ cm\,.$

$S_{PRH} = \dfrac{1}{2}\,\overline{PH} \cdot \overline{HR} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{48}{5} \cdot \dfrac{36}{5} = \dfrac{864}{25}\ cm^2\,.$

7. In un triangolo rettangolo ABC , l'ipotenusa $\overline{\mathrm{AB}} = 40\ \mathrm{cm}$ e il cateto $\overline{\mathrm{AC}} = 24\ \mathrm{cm}$. Sia CH l'altezza relativa all'ipotenusa AB e CK la bisettrice dell'angolo retto $\hat{\mathrm{C}}$. Calcola l'area del triangolo CHK.



Soluzione

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ABC si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{40^2 - 24^2}\ cm =$$

$$= \sqrt{1024}\ cm = 32\ cm$$

L'area del triangolo ABC vale:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 32\right) cm^2 = 384\ cm^2$$

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 384}{40}\ cm = \frac{96}{5}\ cm\ .$$

Ricordando il T. della bisettrice:

"La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri due lati",

si ottiene:

$\overline{AK} : \overline{KB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ $\qquad$ $\overline{AK} : \overline{KB} = 24 : 32$;

Ponendo $\overline{AK} = x$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x : \overline{KB} = 24 : 32$; $\qquad$ $\overline{KB} = \frac{32x}{24} = \frac{4}{3}x$.

Considerando che: $\overline{AK} + \overline{KB} = 40$ si ha:

$x + \dfrac{4}{3}x = 40$; $\qquad$ $3x + 4x = 120$; $\qquad$ $7x = 120$; $\qquad$ $x = \dfrac{120}{7}$

Pertanto $\overline{AK} = \frac{120}{7}\ cm$ e $\overline{KB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{120}{7} = \frac{160}{7}\ cm$.

Applicando il T. di Pitagora al triangolo ACH si ha:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{24^2 - \left(\frac{96}{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{576 - \frac{9216}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{5184}{25}}\ cm = \frac{72}{5}\ cm\ .$$

Si ricava quindi: $\overline{HK} = \overline{AK} - \overline{AH} = \left(\frac{120}{7} - \frac{72}{5}\right)\ cm = \frac{600-504}{35} = \frac{96}{35}\ cm$.

In definitiva l'area vale:

$$S_{CHK} = \frac{1}{2}\overline{HK} \cdot \overline{CH} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{96}{35} \cdot \frac{96}{5}\right) cm^2 = \frac{4608}{175}\ cm^2$$