Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Logica + Geometria (parte 1)

04.05.2012

prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 1 C

1. Dimostra la 1ª legge di De Morgan.

2. Date le proposizioni p:"Milano è il capoluogo della Lombardia" ; q:"Il Tevere bagna Roma" ; r:"Il rettangolo ha 3 lati" , esprimi in linguaggio naturale la proposizione $(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$ e determina il suo valore di verità.

3. Dati i predicati: $a(x) : x \text{ è } un\ divisore\ di\ 16$ e $b(x) : 2x + 1 < 13$ definiti nel Dominio $D = \{1, 4, 5, 6, 8, 10\}$ determina:
   a. l'insieme di verità di: $a(x) \vee b(x)$
   b. il valore di verità della proposizione: $a(6) \longmapsto \overline{b(6)}$

4. Stabilisci quale delle seguenti è la negazione della proposizione: "Guido e mangio".
   - ☐ Non guido e non mangio
   - ☐ Guido e non mangio
   - ☐ Non guido e mangio
   - ☐ Non guido o non mangio

5. Analizza il seguente ragionamento, individuando le proposizioni elementari e il relativo schema di deduzione. Indica poi se si tratta di un ragionamento corretto.

   Se non piove, esco
   Piove
   ___
   Non esco

6. Stabilisci se è corretto il seguente ragionamento, effettuando la relativa rappresentazione insiemistica.

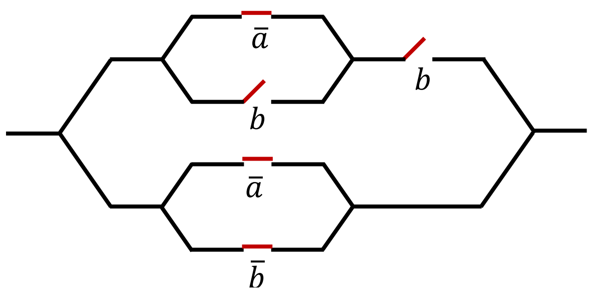
   Tutti gli elefanti volano
   Tutto ciò che vola ha le ali
   ___
   Gli elefanti hanno le ali

7. Analizza il seguente ragionamento, individuando le proposizioni elementari e il relativo schema di deduzione. Indica poi se si tratta di un ragionamento corretto.

   Leggo il giornale o gioco a carte
   Se guardo la TV allora non gioco a carte
   ___
   Se guardo la TV allora leggo il giornale

8. Costruisci la tavola di verità e il circuito elettrico corrispondente alla proposizione: $[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \wedge [a \rightarrow (b \vee c)]$

9. Determina la proposizione corrispondente al circuito a lato. Semplifica la proposizione ottenuta utilizzando le proprietà dei connettivi logici e disegna un circuito equivalente più semplice.



10. In un triangolo isoscele PQR, con base il lato PQ, individua un punto $S \in RP$ e un punto $T \in RQ$ tali che $RS \cong RT$. Dimostra che i due triangoli PTR e QSR sono congruenti. Successivamente, dimostra che i triangoli PTS e QST sono congruenti.

11. In un triangolo PQR, individua il punto medio M del lato PQ. Traccia la retta r passante per il punto M e parallela al lato QR e la retta s passante per il punto M e parallela al lato PR. Sia H il punto di intersezione fra la retta r e il lato PR e K il punto di intersezione fra la retta s e il lato QR. Dimostra che:
   a. $MH \cong QK$ e $MK \cong PH$
   b. $HK \parallel PQ$ e $PQ \cong 2\,HK$

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Totale
	Punti	4	4	4	4	10	4	10	10	10	10	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Dimostra la 1ª legge di De Morgan.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

2. Date le proposizioni p:"Milano è il capoluogo della Lombardia" ; q:"Il Tevere bagna Roma" ; r:"Il rettangolo ha 3 lati" , esprimi in linguaggio naturale la proposizione $(p \wedge q) \mapsto \bar{r}$ e determina il suo valore di verità.

<u>Soluzione</u>

$(p \wedge q) \wedge \bar{r}$: "Se Milano è il capoluogo della Lombardia e il Tevere bagna Roma allora il rettangolo non ha 3 lati" è una proposizione vera. Infatti costruendo la relativa tavola di verità si ha:

p	q	r	$\bar{r}$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longmapsto \bar{r}$
V	V	F	V	V	V

3. Dati i predicati: $a(x) : x$ è $un\ divisore\ di\ 16$ e $b(x) : 2x + 1 < 13$ definiti nel Dominio $D = \{1, 4, 5, 6, 8, 10\}$ determina:
a. l'insieme di verità di: $a(x) \vee b(x)$
b. il valore di verità della proposizione: $a(6) \longmapsto \overline{b(6)}$

<u>Soluzione</u>

L'insieme di verità dell'enunciato aperto $a(x) \vee b(x)$ è l'insieme: $A \cup B = \{1, 4, 5, 8\}$

$a(6)$ è una proposizione falsa; $\overline{b(6)}$ è una proposizione vera; $\Rightarrow$ $a(6) \longmapsto \overline{b(6)}$ è una proposizione vera.

4. Stabilisci quale delle seguenti è la negazione della proposizione: "Guido e mangio".

☐ Non guido e non mangio
☐ Non guido e mangio
☐ Guido e non mangio
☐ Non guido o non mangio

<u>Soluzione</u>

Ricordando la 1ª legge di De Morgan: $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

si ha che la negazione della proposizione "Guido e mangio" è " Non guido o non mangio".

5. Analizza il seguente ragionamento, individuando le proposizioni elementari e il relativo schema di deduzione. Indica poi se si tratta di un ragionamento corretto.

<u>Soluzione</u>

Le proposizioni elementari sono: p: "piove" q: "esco"
Il relativo schema di deduzione è:

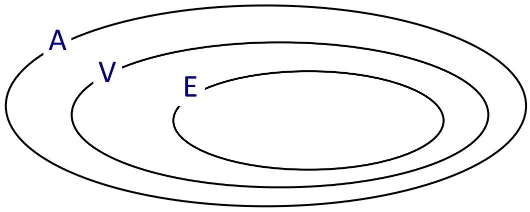
Se non piove, esco	$\bar{p} \rightarrow q$
Piove	p
Non esco	$\bar{q}$

Il ragionamento non è corretto.
Infatti nei due casi in cui entrambe le premesse $\bar{p} \rightarrow q$ e p sono vere la conclusione $\bar{q}$ può essere vera o falsa.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \rightarrow q$	$(\bar{p} \rightarrow q) \wedge p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F

6. Stabilisci se è corretto il seguente ragionamento, effettuando la relativa rappresentazione insiemistica.

Tutti gli elefanti volano
Tutto ciò che vola ha le ali
___
Gli elefanti hanno le ali



Il ragionamento è corretto.

7. Analizza il seguente ragionamento, individuando le proposizioni elementari e il relativo schema di deduzione. Indica poi se si tratta di un ragionamento corretto.

Leggo il giornale o gioco a carte
Se guardo la TV allora non gioco a carte
___
Se guardo la TV allora leggo il giornale

Soluzione

Le proposizioni elementari sono: a:"Leggo il giornale" b: "gioco a carte" c: "guardo la TV"

Il relativo schema di deduzione è:

$$\begin{array}{c} a \vee b \\ \underline{c \rightarrow \bar{b}} \\ c \rightarrow a \end{array}$$

La cui tabella è:

a	b	c	$\bar{b}$	$a \vee b$	$c \rightarrow \bar{b}$	$(a \vee b) \wedge (c \rightarrow \bar{b})$	$c \rightarrow a$
V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V

Nei quattro casi in cui le premesse sono entrambe vere, anche la conclusione è sempre vera. Pertanto il ragionamento è corretto.

8. Costruisci la tavola di verità e il circuito elettrico corrispondente alla proposizione: $[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \wedge [a \rightarrow (b \vee c)]$

a	b	c	$\bar{b}$	$\bar{c}$	$a \wedge \bar{b}$	$[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})]$	$b \vee c$	$a \rightarrow (b \vee c)$	$[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \wedge [a \rightarrow (b \vee c)]$
V	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
V	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*F*
V	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
F	*V*	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*
F	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*

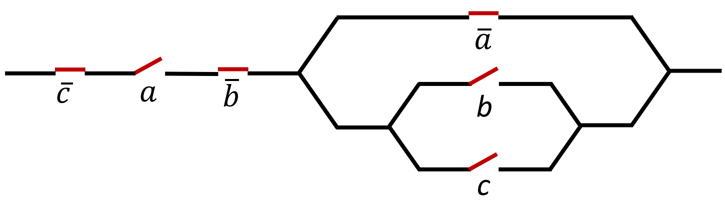
La proposizione è una contraddizione.

Ricordando che: $a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$ si ha che la proposizione:

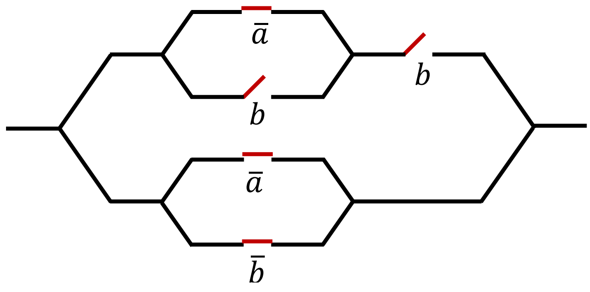
$[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \wedge [a \rightarrow (b \vee c)]$ è equivalente alla:

$[\bar{c} \wedge (a \wedge \bar{b})] \wedge [\bar{a} \vee (b \vee c)]$

Il cui circuito elettrico è disegnato a lato.



9. Determina la proposizione corrispondente al circuito a lato. Semplifica la proposizione ottenuta utilizzando le proprietà dei connettivi logici e disegna il circuito equivalente più semplice.



La proposizione corrispondente al circuito a lato è: $[(\bar{a} \vee b) \wedge b] \vee (\bar{a} \vee \bar{b})$

Essa si può semplificare applicando le proprietà dei connettivi logici.

Per la proprietà Commutativa: $p \wedge q = q \wedge p$ e $p \vee q = q \vee p$ si ha:

$[(\bar{a} \vee b) \wedge b] \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = [b \wedge (\bar{a} \vee b)] \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = [b \wedge (b \vee \bar{a})] \vee (\bar{a} \vee \bar{b})$

Per la proprietà di Assorbimento: $p \wedge (p \vee q) = p$ si ha:

$[b \wedge (b \vee \bar{a})] \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = b \vee (\bar{a} \vee \bar{b})$

Per la proprietà Commutativa: $p \wedge q = q \wedge p$ e $p \vee q = q \vee p$ si ha:

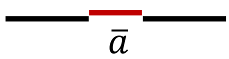
$b \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = (\bar{a} \vee \bar{b}) \vee b$

Per la proprietà Associativa: $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ si ha:

$(\bar{a} \vee \bar{b}) \vee b = \bar{a} \vee (\bar{b} \vee b)$

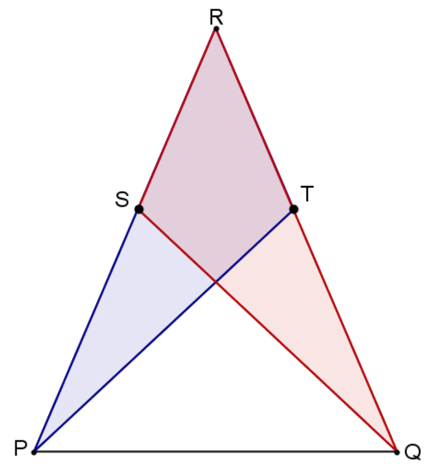
Essendo $\bar{b} \vee b$ una tautologia, si ha: $\bar{a} \vee (\bar{b} \vee b) = \bar{a}$.

Il cui circuito corrispondente è rappresentato a lato.



10. In un triangolo isoscele PQR, con base il lato PQ, individua un punto S ∈ RP e un punto T ∈ RQ tali che RS ≅ RT. Dimostra che i due triangoli PTR e QSR sono congruenti. Successivamente, dimostra che i triangoli PTS e QST sono congruenti.

IPOTESI		TESI
PQR è un Triangolo $\overline{PR} \cong \overline{QR}$ $\overline{RS} \cong \overline{RT}$	$\Rightarrow$	$PTR \cong QSR$ $PTS \cong QST$



Dimostrazione

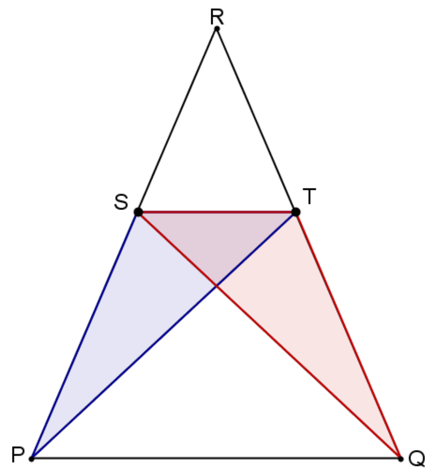
I triangoli PTR e QSR sono congruenti per il 1° C.C.T.

Infatti:

$RS \cong RT$ per ipotesi

$PR \cong QR$ perché lati obliqui del triangolo isoscele

$\hat{R}$ angolo comune ai due triangoli.



I triangoli PTS e QST sono congruenti per il 3° C.C.T.

Infatti:

$PT \cong SQ$ perché i triangoli $PTR \cong QSR$ *(dimostrazione precedente)*

$PS \cong TQ$ perché differenza di segmenti congruenti

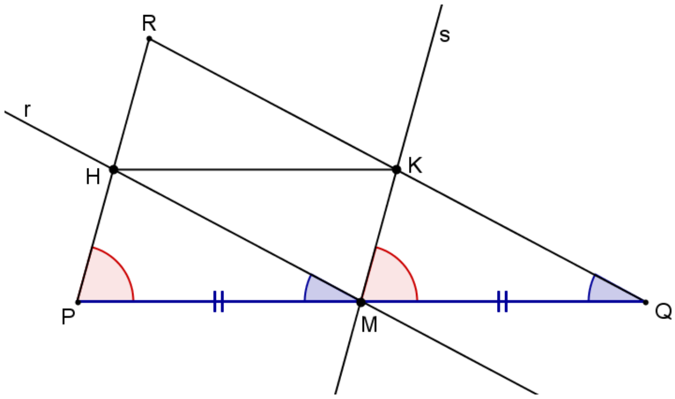
ST lato comune ai due triangoli.

11. In un triangolo PQR, individua il punto medio M del lato PQ. Traccia la retta r passante per il punto M e parallela al lato QR e la retta s passante per il punto M e parallela al lato PR. Sia H il punto di intersezione fra la retta r e il lato PR e K il punto di intersezione fra la retta s e il lato QR.

Dimostra che:

a. $MH \cong QK$ e $MK \cong PH$

b. $HK \parallel PQ$ e $PQ \cong 2\,HK$



IPOTESI		TESI
PQR è un Triangolo $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$ $MH \parallel QR$ $MK \parallel PR$	$\Rightarrow$	$MH \cong QK$ e $MK \cong PH$ $HK \parallel PQ$ e $PQ \cong 2\,HK$

Dimostrazione 1

Per dimostrare che $MH \cong QK$ e $MK \cong PH$ è sufficiente dimostrare

che i triangoli PMH e MQK sono congruenti.

I triangoli PMH e MQK sono congruenti per il 2° C.C.T.

Infatti:

$PM \cong MQ$ perché M è il punto medio di PQ

$M\hat{P}H \cong Q\hat{M}K$ perché angoli corrispondenti fra le rette parallele PR ed s, tagliate dalla trasversale PQ

$P\hat{M}H \cong M\hat{Q}K$ perché angoli corrispondenti fra le rette parallele QR ed R, tagliate dalla trasversale PQ .

Dimostrazione 2

Per dimostrare che $HK \parallel PQ$ e $PQ \cong 2\,HK$ è sufficiente dimostrare che i triangoli PMH e HMK sono congruenti.

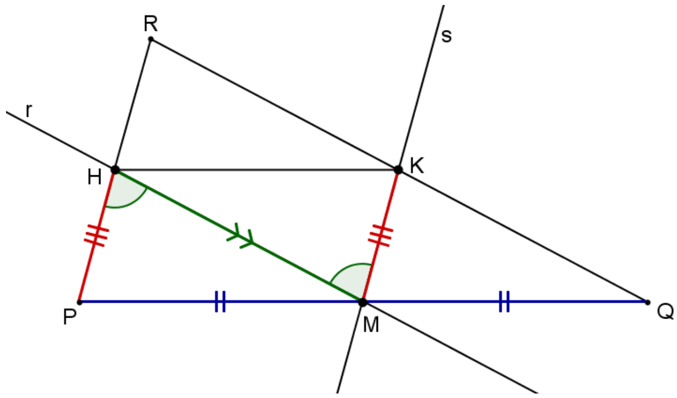
I triangoli PMH e HMK sono congruenti per il 1° C.C.T.

Infatti:

$P\hat{H}M \cong K\hat{M}H$ perché angoli alterni interni alle rette parallele PR ed s, tagliate dalla trasversale r .

$MK \cong PH$ perché i triangoli $PTR \cong QSR$ *(dim. precedente)*

HM lato comune ai due triangoli



Avendo dimostrato che i triangoli PMH $\cong$ HMK si ha che:

- gli angoli $P\hat{M}H \cong M\hat{H}K$; essendo $P\hat{M}H$ e $M\hat{H}K$ angoli alterni interni alle rette HK e PQ $\Rightarrow$ $HK \parallel PQ$
- i lati $PM \cong HK$ $\Rightarrow$ $PQ \cong 2\,HK$.