Prova di Matematica : Equazioni e problemi di I° grado

30.03.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ______________________________________ Classe: 1 C

1. Completa la seguente tabella:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$2x = 1$	Z				
$x + 2 = 0$	N				
$5x - 1 = 4 + 5(x - 1)$	R				
$x + y = 1$	R				
$3(2x + 1) = 3 + 6x$	R				
$x = x + 1$	R				
$2\|x\| = 2x$	R				

2. Data la formula: $A = k \cdot \dfrac{b \cdot c}{R^2 + t}$ ricava la formula inversa per determinare t .

3. Risolvi le seguenti equazioni:

$$(3x-1)^2 - 3x \cdot (x-3) - [1 + x(x-2)] = 2x \cdot (3x-2) + 5x - (x-1)^2 \qquad (effettua\ la\ verifica)$$

$$(x-2)^3 - 3x \cdot (2-x) = (x-1)^3 + 2 \qquad (effettua\ la\ verifica)$$

$$\frac{x-1}{5} - \left\{\frac{1}{5}x - \left[\frac{3}{2}x - \frac{x-1}{10} - \frac{1}{100}(10x-40)\right]\right\} = \frac{3-x}{2}$$

$$\frac{30 + (1+x)(3-x)}{13x - 2x^3 - x^2 - 6} - \frac{x-4}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{-10}{2x^2 + 5x - 3}$$

$$ax(a+1) + 6a - a^2 = 12x + 9$$

$$\frac{a(3-x)}{a-1} + \frac{a}{a+1} = \frac{5a-3}{a-1} - \frac{3ax+1}{a+1}$$

$$\frac{1}{2mx^2 - 2m^3} + \frac{1}{mx^2 - m^2x} = \frac{1}{2x^2 + 2mx}$$

4. Un'automobile, su un'autostrada, parte da un casello A verso il casello B che dista 200 km da A. Dopo 20 minuti, dal casello B parte una seconda automobile che si muove verso il casello A. La prima automobile viaggia a una velocità costante di 110 km/h, la seconda automobile viaggia a una velocità costante di 90 km/h. Dopo quanto tempo dalla sua partenza la prima automobile incontrerà la seconda? Quanti chilometri ha percorso la prima automobile al momento del contatto?

5. Un professore di matematica, per decidere quale allievo interrogare, procede nel seguente modo: moltiplica per 2 il numero dei giorni del mese dell'interrogazione e divide il risultato per la data del giorno dell'interrogazione. Il resto di tale divisione individua il numero dell'alunno, presente nel registro, da interrogare. Se il resto è zero non viene interrogato nessuno. Ieri è stato interrogato il numero 16. Sapendo che siamo nel mese di novembre e che il quoziente della divisione è 2, determina la data odierna. Perché non può mai essere interrogato uno studente il cui numero sul registro è uguale o superiore al giorno dell'interrogazione?

6. Si narra che sulla tomba del celebre matematico greco Diofanto fosse scolpita la seguente iscrizione: *"Qui Diofanto ha la sua tomba che a te rivela con l'aritmetica quanti anni visse. Egli passò un sesto della vita nell'infanzia, un dodicesimo nell'adolescenza, un settimo nella giovinezza. Poi si ammogliò e dopo 5 anni ebbe un figlio che visse la metà della vita del padre; il padre gli sopravvisse ancora 4 anni mitigando il suo dolore con lo studio dell'aritmetica"*. A che età morì Diofanto?

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	Totale
	Punti	5	5	40	10	10	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Completa la seguente tabella:

Espressione	Dominio	Identità	Eq. determinata	Eq. indeterminata	Eq. impossibile
$2x = 1$	Z				X
$x + 2 = 0$	N				X
$5x - 1 = 4 + 5(x - 1)$	R	X		X	
$x + y = 1$	R			X	
$3(2x + 1) = 3 + 6x$	R	X		X	
$x = x + 1$	R				X
$2\|x\| = 2x$	R			X	

2. Data la formula: $A = k \cdot \dfrac{b \cdot c}{R^2 + t}$ ricava la formula inversa per determinare t .

$A \cdot (R^2 + t) = k \cdot b \cdot c$; $\qquad R^2 + t = \dfrac{k \cdot b \cdot c}{A}$; $\qquad t = \dfrac{k \cdot b \cdot c}{A} - R^2$

3. Risolvi le seguenti equazioni:

$(3\mathrm{x} - 1)^2 — 3\mathrm{x} \cdot (\mathrm{x} - 3) - [1 + \mathrm{x}(\mathrm{x} - 2)] = 2\mathrm{x} \cdot (3\mathrm{x} - 2) + 5\mathrm{x} - (\mathrm{x} - 1)^2$;

$9x^2 + 1 - 6x - 3x^2 + 9x - [1 + x^2 - 2x] = 6x^2 - 4x + 5x - (x^2 + 1 - 2x)$;

$9x^2 + 1 - 6x - 3x^2 + 9x - 1 - x^2 + 2x = 6x^2 - 4x + 5x - x^2 - 1 + 2x$;

$-6x + 9x = -4x + 5x - 1$;

$-6x + 9x + 4x - 5x = -1$;

$2x = -1$;

$x = -\dfrac{1}{2}$.

Verifica

$\left(3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - 3\right) - \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 2\right)\right] = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right) + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2$

$\left(-\dfrac{3}{2} - 1\right)^2 + \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{7}{2}\right) - \left[1 - \dfrac{1}{2} \cdot \left(-\dfrac{5}{2}\right)\right] = -1 \cdot \left(-\dfrac{3}{2} - 2\right) - \dfrac{5}{2} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2$;

$\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{21}{4} - \left[1 + \dfrac{5}{4}\right] = -1 \cdot \left(-\dfrac{7}{2}\right) - \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4}$;

$\dfrac{25}{4} - \dfrac{21}{4} - \dfrac{9}{4} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2} - \dfrac{9}{4}$;

$\dfrac{25 - 21 - 9}{4} = \dfrac{14 - 10 - 9}{4}$;

$-\dfrac{5}{4} = -\dfrac{5}{4}$.

$(x-2)^3 - 3x \cdot (2-x) = (x-1)^3 + 2$;

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 6x + 3x^2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2$;

$12x - 8 - 6x = +3x - 1 + 2$;

$12x - 6x - 3x = 8 - 1 + 2$;

$3x = 9$;

$x = 3$.

Verifica

$(3-2)^3 - 3 \cdot 3 \cdot (2-3) = (3-1)^3 + 2$;

$1^3 - 9 \cdot (-1) = 2^3 + 2$;

$1 + 9 = 8 + 2$;

$10 = 10$.

$\frac{x-1}{5} - \left\{ \frac{1}{5}x - \left[\frac{3}{2}x - \frac{x-1}{10} - \frac{1}{100}(10x - 40) \right] \right\} = \frac{3-x}{2}$;

$\frac{x-1}{5} - \left\{ \frac{1}{5}x - \left[\frac{3}{2}x - \frac{x-1}{10} - \frac{1}{10}x + \frac{2}{5} \right] \right\} = \frac{3-x}{2}$;

$\frac{x-1}{5} - \left\{ \frac{1}{5}x - \frac{3}{2}x + \frac{x-1}{10} + \frac{1}{10}x - \frac{2}{5} \right\} = \frac{3-x}{2}$;

$\frac{x-1}{5} - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}x - \frac{x-1}{10} - \frac{1}{10}x + \frac{2}{5} = \frac{3-x}{2}$;

$2 \cdot (x-1) - 2x + 15x - (x-1) - x + 4 = 5 \cdot (3-x)$;

$2x - 2 - 2x + 15x - x + 1 - x + 4 = 15 - 5x$;

$-2 + 15x - x + 1 - x + 4 = 15 - 5x$;

$15x - x - x + 5x = 15 + 2 - 1 - 4$;

$18x = 12$;

$x = \frac{12}{18}$;

$x = \frac{2}{3}$.

$$\frac{30+(1+x)(3-x)}{13x-2x^3-x^2-6}-\frac{x-4}{2x^2-5x+2}=\frac{-10}{2x^2+5x-3} \ ;$$

$$\frac{30+3-x+3x-x^2}{-(x-2)(x+3)(2x-1)}-\frac{x-4}{(x-2)(2x-1)}=\frac{-10}{(x+3)(2x-1)} \ ;$$

$$\frac{x^2-2x-33}{(x-2)(x+3)(2x-1)}-\frac{x-4}{(x-2)(2x-1)}=\frac{-10}{(x+3)(2x-1)} \ ; \qquad C.E.: x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -3 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{2}$$

$$x^2-2x-33-(x+3)(x-4)=-10(x-2) \ ;$$

$$x^2-2x-33-x^2+4x-3x+12=-10x+20 \ ;$$

$$-2x-33+4x-3x+12=-10x+20 \ ;$$

$$-2x+4x-3x+10x=20+33-12 \ ;$$

$$9x=41 \ ;$$

$$x=\frac{41}{9} \quad \mathit{Accettabile}.$$

$$ax(a+1)+6a-a^2=12x+9 \ ;$$

$$a^2x+ax+6a-a^2=12x+9 \ ;$$

$$a^2x+ax-12x=a^2-6a+9 \ ;$$

$$(a^2+a-12)x=a^2-6a+9 \ ;$$

$$(a+4)(a-3)x=(a-3)^2 \ ;$$

$$Se \ \ (a+4)(a-3) \neq 0 \ ; \quad cioè \ se \ \begin{matrix} a \neq -4 \\ a \neq 3 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{(a-3)^2}{(a+4)(a-3)}=\frac{a-3}{a+4}$$

$$Se \ a=-4 \qquad \Longrightarrow \qquad 0x=49 \quad equazione \ impossibile$$

$$Se \ a=3 \qquad \Longrightarrow \qquad 0x=0 \quad equazione \ indeterminata$$

Riassumendo:

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a=-4$	*Equazione impossibile*	*Nessuna soluzione*
$a=3$	*Equazione indeterminata*	*Infinite soluzioni*
$a \neq -4 \ \wedge \ a \neq 3$	*Equazione determinata*	$x=\frac{a-3}{a+4}$

$$\frac{a(3-x)}{a-1}+\frac{a}{a+1}=\frac{5a-3}{a-1}-\frac{3ax+1}{a+1} \quad ; \qquad C.E.:\ a\neq \pm 1$$

$a(3-x)(a+1)+a(a-1)=(5a-3)(a+1)-(3ax+1)(a-1)$;

$a(3a+3-ax-x)+a^2-a=5a^2+5a-3a-3-(3a^2x-3ax+a-1)$;

$3a^2+3a-a^2x-ax+a^2-a=5a^2+5a-3a-3-3a^2x+3ax-a+1$;

$3a^2x-a^2x-ax-3ax=5a^2+5a-3a-3+1-3a^2-3a-a^2$;

$(3a^2-a^2-a-3a)x=a^2-a-2$;

$(2a^2-4a)x=(a-2)(a+1)$;

$2a(a-2)x=(a-2)(a+1)$;

$Se\ \ 2a(a-2)\neq 0$; $\quad$ *cioè se* $\begin{matrix} a\neq 0 \\ a\neq 2\end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad x=\dfrac{(a-2)(a+1)}{2a(a-2)}=\dfrac{a+1}{2a}$

$Se\ a=0 \qquad \Longrightarrow \qquad 0x=-2$ $\quad$ *equazione impossibile*
$Se\ a=2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0x=0$ $\quad$ *equazione indeterminata*

Riassumendo:

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$a=\pm 1$	*Equazione che perde significato*	-
$a=0$	*Equazione impossibile*	*Nessuna soluzione*
$a=2$	*Equazione indeterminata*	*Infinite soluzioni*
$a\neq\pm 1\ \wedge\ a\neq 0\ \wedge\ a\neq 2\ \wedge\ a\neq 0$	*Equazione determinata*	$\dfrac{a+1}{2a}$

$$\frac{1}{2mx^2-2m^3}+\frac{1}{mx^2-m^2x}=\frac{1}{2x^2+2mx}$$

$$\frac{1}{2m(x+m)(x-m)}+\frac{1}{mx(x-m)}=\frac{1}{2x(x+m)} \qquad (C.E.)_m:\ m\neq 0\ ; \qquad (C.E.)_x:\ x\neq 0\ ; \quad x\neq \pm m$$

$m.cm.=2mx(x+m)(x-m)$

$x+2(x+m)=m(x-m)$;

$x+2x+2m=mx-m^2$;

$x+2x-mx=-2m-m^2$;

$(3-m)x=-m(m+2)$;

$Se\ \ 3-m=0$, *cioè se* $\ m=3 \quad \Rightarrow \quad 0x=-15$ $\quad$ *Equazione impossibile* .

$Se\ \ 3-m\neq 0$, *cioè se* $\ m\neq 3 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-m(m+2)}{3-m}=\dfrac{m(m+2)}{m-3}$

Ma tale soluzione è accettabile se rispetta le condizioni di accettabilità: $(C.E.)_x:\ x\neq 0\ ; \quad x\neq \pm m$.

Pertanto:

$\dfrac{m(m+2)}{m-3}\neq 0$; $\qquad m(m+2)\neq 0$; $\qquad \begin{matrix} m\neq 0 \\ m\neq -2\end{matrix}$

$\dfrac{m(m+2)}{m-3}\neq m$; $\qquad m(m+2)\neq m^2-3m$; $\qquad m^2+2m\neq m^2-3m$; $\qquad 5m\neq 0$; $\qquad m\neq 0$.

$\dfrac{m(m+2)}{m-3}\neq -m$; $\qquad m(m+2)\neq -m^2+3m$; $\qquad m^2+2m\neq -m^2+3m$; $\qquad 2m^2-m\neq 0$;

$m(2m-1)\neq 0 \qquad \begin{matrix} m\neq 0 \\ 2m-1\neq 0\end{matrix} \qquad \begin{matrix} m\neq 0 \\ m\neq \dfrac{1}{2}\end{matrix}$

Parametro	Tipo di equazione	Soluzione
$m = 0$	*Equazione che perde significato*	-
$m = -2 \quad \vee \quad m = \frac{1}{2} \quad \vee \quad m = 3$	*Equazione impossibile*	
$m \neq 0 \;\; \wedge \;\; m \neq -2 \;\; \wedge \;\; m \neq \frac{1}{2} \;\; \wedge \;\; m \neq 3$	*Equazione determinata*	$x = \frac{m(m+2)}{m-3}$

4. Un'automobile, su un'autostrada, parte da un casello A verso il casello B che dista 200 km da A. Dopo 20 minuti, dal casello B parte una seconda automobile che si muove verso il casello A. La prima automobile viaggia a una velocità costante di 110 km/h, la seconda automobile viaggia a una velocità costante di 90 km/h. Dopo quanto tempo dalla sua partenza la prima automobile incontrerà la seconda? Quanti chilometri ha percorso la prima automobile al momento del contatto?

Soluzione

Occorre innanzitutto trasformare: $20\ min = \left(\frac{20}{60}\right)^h = \left(\frac{1}{3}\right)^h$

Si pone il tempo incognito $t_A = t \qquad \Rightarrow \qquad t_B = t - \frac{1}{3}$ (condizioni di accettabilità: $t > 0$).

Ricordando che la velocità $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{t}}$ si ha che: $\mathrm{s} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{t}$

Nell'istante in cui le due auto si incontrano, la somma degli spazi percorsi è uguale alla distanza tra i due caselli.

$s_A + s_B = 200\ km$

$v_A \cdot t_A + v_B \cdot t_B = 200$

$110t + 90 \cdot \left(t - \frac{1}{3}\right) = 200$

$110t + 90t = 200 + 30$

$200t = 230$

$t = \left(\frac{230}{200}\right)^h = 1^h\ \ 0{,}15^h = 1^h\ \ (0{,}15 \cdot 60)^I = 1^h\ \ 9^I$

$\mathrm{s_A} = \mathrm{v_A} \cdot \mathrm{t} = 110 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \cdot 1{,}15^h = 126{,}5\ km.$

5. Un professore di matematica, per decidere quale allievo interrogare, procede nel seguente modo: moltiplica per 2 il numero dei giorni del mese dell'interrogazione e divide il risultato per la data del giorno dell'interrogazione. Il resto di tale divisione individua il numero dell'alunno, presente nel registro, da interrogare. Se il resto è zero non viene interrogato nessuno. Ieri è stato interrogato il numero 16. Sapendo che siamo nel mese di novembre e che il quoziente della divisione è 2, determina la data odierna. Perché non può mai essere interrogato uno studente il cui numero sul registro è uguale o superiore al giorno dell'interrogazione?

<u>*Soluzione*</u>

Ponendo:

data dell'interrogazione $= x$

numero dei giorni del mese = g

numero alunno $= n$

si ha: $2x + n = 2 \cdot 30$

Sostituendo i dati del problema si ottiene: $2x + 16 = 2 \cdot 30$.

Risolvendo l'equazione si ottiene: $2x = 60 - 16$; $2x = 44$; $x = 22$.

Pertanto ieri era il 22 novembre $\Rightarrow$ oggi è il 23 novembre .

Non può mai essere interrogato uno studente il cui numero sul registro è uguale o superiore al giorno dell'interrogazione perché il resto di una divisione è sempre minore del quoziente (il quoziente è uguale alla data dell'interrogazione e il resto è uguale al numero dell'alunno).

6. Si narra che sulla tomba del celebre matematico greco Diofanto fosse scolpita la seguente iscrizione: *"Qui Diofanto ha la sua tomba che a te rivela con l'aritmetica quanti anni visse. Egli passò un sesto della vita nell'infanzia, un dodicesimo nell'adolescenza, un settimo nella giovinezza. Poi si ammogliò e dopo 5 anni ebbe un figlio che visse la metà della vita del padre; il padre gli sopravvisse ancora 4 anni mitigando il suo dolore con lo studio dell'aritmetica"*.

A che età morì Diofanto?

<u>*Soluzione*</u>

Ponendo il numero degli anni che ha vissuto Diofanto $= x$ *si ha:*

$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$; $14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$;

$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336$; $9x = 756$; $x = 84$.

Pertanto Diofanto è morto a 84 anni.