Prova di Matematica : Polinomi

20.12.2011
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 1 C

1. Calcola il valore numerico della seguente espressione, in corrispondenza dei valori delle variabili indicati:
$$\left[\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x}{y}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\right]:\frac{x-y}{x+y} \qquad x=-2 \quad e \quad y=\frac{2}{3}$$

2. Calcola il $\mathrm{M.C.D.}(24\mathrm{x}^2\mathrm{y}\,;\ 36\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4\mathrm{z}^2\,;\ -20\mathrm{xy}^6\mathrm{z}^2)$ e il $\mathrm{m.c.m.}(24\mathrm{x}^2\mathrm{y}\,;\ 12\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4\mathrm{z}^5\,;\ -20\mathrm{xy}^6\mathrm{z}^3)$

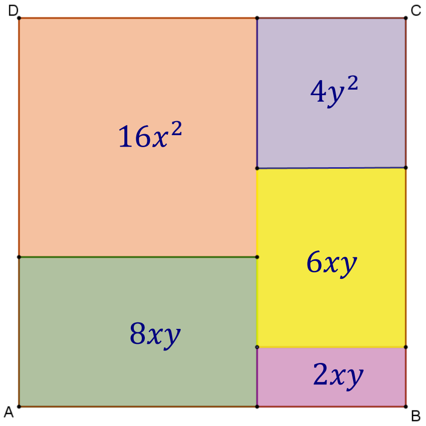
3. Completa le seguenti uguaglianze:
$$(\,.\,.\,.\,+3y^4)\cdot(4x^6-\,.\,.\,.\,)\ =\ 16x^{12}-9y^8 \qquad 9x^4+\,.\,.\,.\,.\,.\,-\,.\,.\,.\,.\,.\,=(\,.\,.\,.\,-\,4xy^2)^2$$

4. Semplifica le seguenti espressioni utilizzando, quando è possibile, i prodotti notevoli:
$$(3x^2-4xy)\cdot(3x^2+4xy)-(3x^2+4xy+1)^2 \qquad (2a+1)^3-2a\cdot(2a+1)^2-4a^2-1$$
$$[(x-1)^3-(x+1)^3]^2-4(3x^2+1)\cdot(3x^2-1)-8 \qquad \left[\left(x-\frac{1}{2}y\right)^3+\frac{3}{2}xy\left(x-\frac{1}{2}y\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{8}y^3+x^3\right)-\left(-\frac{1}{4}y^2\right)^3$$

5. Determina quoziente e resto della divisione: $(6y^4-17y^3+12y^2-11y+5):(3y^2-y+2)$ ed esegui la prova.

6. Utilizzando la regola di Ruffini effettua la seguente divisione: $(4x^3+4x^2-3x+4):(2x+1)$ ed esegui la prova.

7. Dimostra che la differenza tra il quadrato del successivo di un numero naturale n e il quadrato del precedente del numero n è uguale al quadruplo del numero n .



8. Scrivi il polinomio che rappresenta l'area del quadrato ABCD in figura a lato e determina il lato del quadrato e i lati di ogni singola figura.

9. Se in un rettangolo si diminuisce la lunghezza della base del 10% e si aumenta la lunghezza dell'altezza del 10%, l'area aumenta, diminuisce o resta invariata? *(Motiva la risposta)*

10. Un numero di due cifre viene sommato al numero ottenuto invertendo le sue cifre. Si divide quindi la somma ottenuta per la somma delle cifre del numero dato e si eleva al quadrato il risultato. Che numero si ottiene? *(Motiva la risposta)*

36 49 64 81 100 121 *(Olimpiadi della matematica 2002)*

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totale
	Punti	6	4	4	5+5+6+6	5	5	8	8	9	9	80

Punti	*0 - 5*	*6 - 10*	*11 - 15*	*16 - 20*	*21 - 25*	*26 - 30*	*31 - 35*	*36 - 40*	*41 - 45*	*46 - 50*	*51 - 55*	*56 - 60*	*61 - 65*	*66 - 70*	*71 - 75*	*76 - 80*
Voto	*2*	*2½*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Calcola il valore numerico della seguente espressione, in corrispondenza dei valori delle variabili indicati:

$$\left[\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x}{y}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\right]:\ \frac{x-y}{x+y} \qquad\qquad x=-2 \quad e \quad y=\frac{2}{3}$$

<u>*Soluzione*</u>

$$\left[\left(\frac{-2+\frac{2}{3}}{-2-\frac{2}{3}}+\frac{-2}{\frac{2}{3}}\right):\left(\frac{-2}{\frac{2}{3}}+\frac{-2-\frac{2}{3}}{-2+\frac{2}{3}}\right)\right]:\ \frac{-2-\frac{2}{3}}{-2+\frac{2}{3}} \ =$$

$$= \left[\left(\frac{\frac{-6+2}{3}}{\frac{-6-2}{3}}+\frac{-2}{\frac{2}{3}}\right):\left(\frac{-2}{\frac{2}{3}}+\frac{\frac{-6-2}{3}}{\frac{-6+2}{3}}\right)\right]:\ \frac{\frac{-6-2}{3}}{\frac{-6+2}{3}} \ =$$

$$= \left[\left(\frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}}+\frac{-2}{\frac{2}{3}}\right):\left(\frac{-2}{\frac{2}{3}}+\frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}}\right)\right]:\ \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{4}{3}} \ =$$

$$= \left[\left(-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)-2\cdot\frac{3}{2}\right):\left(-2\cdot\frac{3}{2}-\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\right]:\left[\left(-\frac{8}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right] \ =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}-3\right):(-3+2)\right]:2 \ =$$

$$= \left[\left(\frac{1-6}{2}\right):(-1)\right]:2 \ =$$

$$= \left[\left(-\frac{5}{2}\right):(-1)\right]:2 \ =$$

$$= \frac{5}{2}:2 \ =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2} \ =$$

$$= \frac{5}{4}\,.$$

2. Calcola:

$$\mathrm{M.C.D.}\,(24\mathrm{x}^2\mathrm{y}\,;\ 36\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4\mathrm{z}^2\,;\ -20\mathrm{xy}^6\mathrm{z}^2) = 4xy$$

$$\mathrm{m.c.m.}\,(24\mathrm{x}^2\mathrm{y}\,;\ 12\mathrm{x}^3\mathrm{y}^4\mathrm{z}^5\,;\ -20\mathrm{xy}^6\mathrm{z}^3) = 120\mathrm{x}^3\mathrm{y}^6\mathrm{z}^5$$

3. Completa le seguenti uguaglianze:

$$(4x^6+3y^4)\cdot(4x^6-3y^4) \ = \ 16x^{12}-9y^8$$

$$9x^4+16x^2y^4-24x^3y^2 \ = \ (3x^2-4xy^2)^2$$

4. Semplifica le seguenti espressioni utilizzando, quando è possibile, i prodotti notevoli:

$$(3x^2 - 4xy) \cdot (3x^2 + 4xy) - (3x^2 + 4xy + 1)^2 =$$

$$= \ 9x^4 - 16x^2y^2 - (9x^4 + 16x^2y^2 + 1 + 24x^3y + 6x^2 + 8xy) \ =$$

$$= \ 9x^4 - 16x^2y^2 - 9x^4 - 16x^2y^2 - 1 - 24x^3y - 6x^2 - 8xy \ =$$

$$= \ -32x^2y^2 - 24x^3y - 6x^2 - 8xy - 1 \ .$$

$$(2a + 1)^3 - 2a \cdot (2a + 1)^2 - 4a^2 - 1 \ =$$

$$= 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 - 2a \cdot (4a^2 + 4a + 1)^2 - 4a^2 - 1 \ =$$

$$= 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 - 8a^3 - 8a^2 - 2a - 4a^2 - 1 \ =$$

$$= +4a \ .$$

$$[(x-1)^3 - (x+1)^3]^2 - 4(3x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 1) - 8 \ =$$

$$= \ [x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)]^2 - 4(9x^4 - 1) - 8 \ =$$

$$= \ [x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1]^2 - 36x^4 + 4 - 8 \ =$$

$$= \ [-6x^2 - 2]^2 - 36x^4 - 4 \ =$$

$$= \ 36x^4 + 4 + 24x^2 - 36x^4 - 4 \ =$$

$$= \ 24x^2 \ .$$

$$\left[\left(x - \frac{1}{2}y\right)^3 + \frac{3}{2}xy\left(x - \frac{1}{2}y\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{8}y^3 + x^3\right) - \left(-\frac{1}{4}y^2\right)^3 \ =$$

$$= \ \left[x^3 - \frac{3}{2}x^2\mathrm{y} + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3 + \frac{3}{2}x^2\mathrm{y} - \frac{3}{4}xy^2\right] \cdot \left(\frac{1}{8}\mathrm{y}^3 + \mathrm{x}^3\right) - \left(-\frac{1}{64}\mathrm{y}^6\right) \ =$$

$$= \ \left[x^3 - \frac{1}{8}y^3\right] \cdot \left(\frac{1}{8}y^3 + x^3\right) - \left(-\frac{1}{64}y^6\right) \ =$$

$$= \ x^6 - \frac{1}{64}y^6 + \frac{1}{64}y^6 \ =$$

$$= \ x^6 \ .$$

5. Determina quoziente e resto della divisione: $(6y^4 - 17y^3 + 12y^2 - 11y + 5) : (3y^2 - y + 2)$ ed esegui la prova.

<u>Soluzione</u>

$$
\begin{array}{ccccc|l}
+6y^4 & -17y^3 & 12y^2 & -11y & +5 & 3y^2 - y + 2 \\
\cline{6-6}
-6y^4 & +2y^3 & -4y^2 & & & 2y^2 - 5y + 1 \\
\cline{1-3}
 & -15y^3 & +8y^2 & & & \\
 & +15y^3 & -5y^2 & +10y & & \\
\cline{2-5}
 & & +3y^2 & -y & & \\
 & & -3y^2 & +y & -2 & \\
\cline{2-5}
 & & & & +3 &
\end{array}
$$

Prova

$$Quoziente \cdot Divisore + Resto = Dividendo$$

$(3y^2 - y + 2) \cdot (2y^2 - 5y + 1) + 3 =$

$= 6y^4 - 15y^3 + 3y^2 - 2y^3 + 5y^2 - y + 4y^2 - 10y + 2 + 3 =$

$= 6y^4 - 17y^3 + 12y^2 - 11y + 5$.

6. Utilizzando la regola di Ruffini determina quoziente e resto della seguente divisione: $(4x^3 + 4x^2 - 3x + 4) : (2x + 1)$

<u>Soluzione</u>

Dividendo tutti i termini per 2 si ha:

$$\left(2x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + 2\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Applicando la regola di Ruffini si ha:

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & 2 & -\frac{3}{2} & 2 \\
-\frac{1}{2} & & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\
\hline
 & 2 & +1 & -2 & 3
\end{array}
$$

$$Q = 2x^2 + x - 2 \qquad R = 3 \cdot 2 = 6$$

Prova

$$Quoziente \cdot Divisore + Resto = Dividendo$$

$(2x^2 + x - 2) \cdot (2x + 1) + 6 =$

$= 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2x^2 + x - 2 + 6 =$

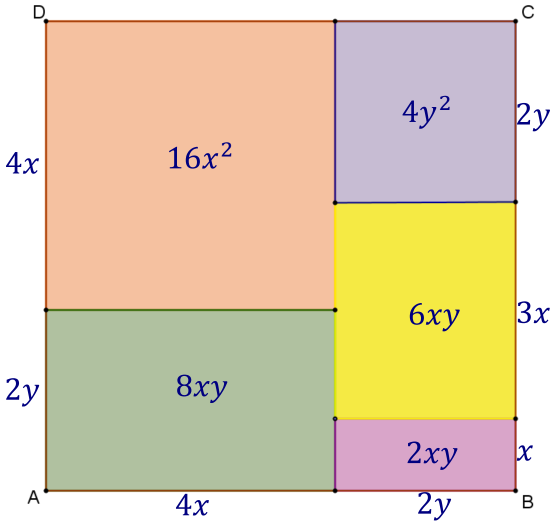
$= 4x^3 + 4x^2 - 3x + 4$.

7. Dimostra che la differenza tra il quadrato del successivo di un numero naturale n e il quadrato del precedente del numero n è uguale al quadruplo del numero n .

Soluzione

$$(n+1)^2-(n-1)^2 \quad = \quad n^2+1+2n-(n^2+1-2n) \quad = \quad n^2+1+2n-n^2-1+2n \quad = \quad 4n$$

8. Scrivi il polinomio che rappresenta l'area del quadrato ABCD in figura e determina il lato del quadrato e i lati di ogni singola figura.



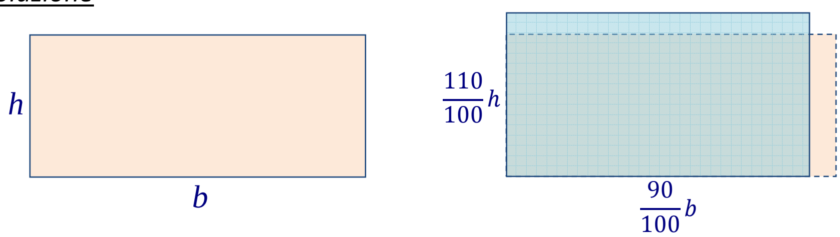
Soluzione

L'area del quadrato è: $\quad S \;=\; 16x^2+4y^2+8xy+6xy+2xy \;=\; 16x^2+4y^2+16xy \;=\; (4x+2y)^2$.

Pertanto il lato del quadrato è: $\quad l=4x+2y$. Le misure degli altri lati sono rappresentati in figura.

9. Se in un rettangolo si diminuisce la lunghezza della base del 10% e si aumenta la lunghezza dell'altezza del 10%, l'area aumenta, diminuisce o resta invariata? *(Motiva la risposta)*

Soluzione



L'area del rettangolo prima della modifica è: $\quad S \;=\; b\cdot h$

Dopo la diminuzione della base e l'aumento dell'altezza l'area del nuovo rettangolo è:

$$S^I \;=\; \frac{90}{100}b\cdot\frac{110}{100}h \;=\; \frac{99}{100}\,b\cdot h \;=\; 99\%\cdot S$$

Pertanto l'area del rettangolo diminuisce dell'1% .

10. Un numero di due cifre viene sommato al numero ottenuto invertendo le sue cifre. Si divide quindi la somma ottenuta per la somma delle cifre del numero dato e si eleva al quadrato il risultato. Che numero si ottiene? *(Motiva la risposta)*

Soluzione

$$\left(\frac{10x+y+10y+x}{x+y}\right)^2 \;=\; \left(\frac{11x+11y}{x+y}\right)^2 \;=\; \left(\frac{11\cdot(x+y)}{x+y}\right)^2 \;=\; 11^2 \;=\; 121\ .$$