Liceo Scientifico "G. Galilei" Trebisacce

Anno Scolastico 2011-2012

Prova di Matematica : Relazioni + Geometria

05.06.2012
prof. Mimmo Corrado

Alunno: ____ Classe: 1 C

1. Dati gli insiemi $A = \{2, 3, 5, 7\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, rappresenta mediante una r. sagittale e con una tabella a doppia entrata la relazione da A a B, R: "$La\ somma\ di\ x\ e\ y$ è $dispari$". Determina il dominio e il codominio.

2. Completa la tabella a lato in modo da ottenere una relazione che gode delle proprietà riflessiva e simmetrica.

A\A	1	2	3	4
1			x	
2		x		
3				
4			x	

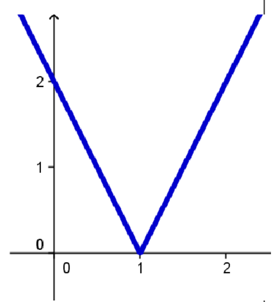
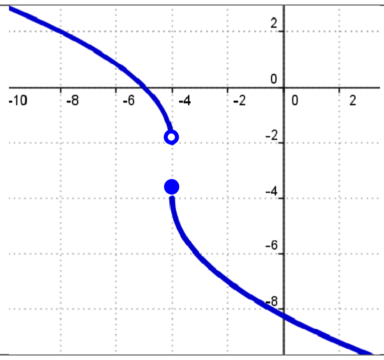
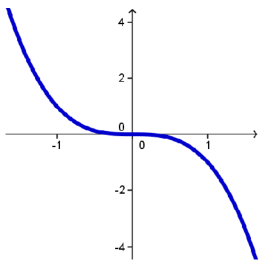
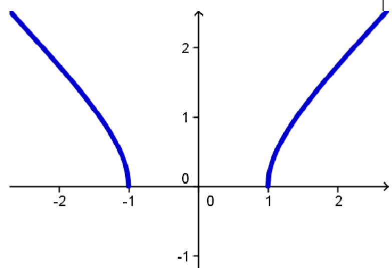
3. Date le relazioni R_1: "$x\ gioca\ nella\ stessa\ squadra\ di\ y$" e R_2: "x è $fidanzato\ con\ y$" stabilisci, motivando la risposta, se sono relazioni di equivalenza. In caso affermativo determina le classi di equivalenza.

4. Data la relazione $R = \{(a; a), (c; a), (b; b), (c; c), (d; d)\}$ definita in $A = \{a, b, c, d\}$.
   - rappresentala mediante un grafo
   - stabilisci di quali proprietà gode e se è una relazione d'ordine, motivando le risposte.

4. Data la relazione $R = \{(a; b), (a; c), (a; d), (a; e), (a; f), (b; d), (b; f), (c; f)\}$ definita nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ verifica, aiutandoti con un grafo, se è una relazione d'ordine e in caso affermativo stabilisci il tipo motivando la risposta.

5. Stabilisci se la relazione $f : A \rightarrow B$ con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ individuata dalle seguenti coppie di valori $(1; 3)$, $(2; 6)$, $(3; 9)$, $(4; 12)$ è una funzione, e in caso affermativo indicane il tipo.

6. Individua quali, dei grafici sottostanti, rappresentano funzioni $f: R \rightarrow R$. Determina: il tipo, il dominio e il codominio.

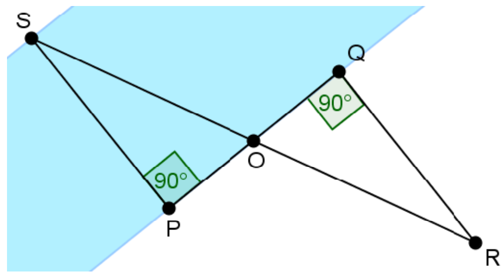
				
Funzione	SI NO	SI NO	SI NO	SI NO
Tipo				
Dominio				
Codominio				

7. Traccia il grafico delle seguenti funzioni: $y = 5 - 2x$ $\qquad y = -\frac{64}{x}$ $\qquad y = -x^2 - 4x + 5$ $\qquad y = |2x - 4|$

8. Dato un parallelogrammo $ABCD$, prolunga il lato AB di un segmento $BE \cong BC$. Traccia la retta passante per E e C e indica con F il punto in cui interseca il prolungamento di AD. Dimostra che $DF \cong DC$.

9. In un parallelogrammo $ABCD$ traccia la diagonale BD e individua su di essa due punti E e F, con F tra il punto D e il punto E e tali che $DF \cong BE$. Dimostra che il quadrilatero AECF è un parallelogrammo .

10. Per stimare la larghezza di un fiume Silvia procede come segue. Si pone nel punto P, di fronte al punto S, posto sulla riva opposta del fiume, dove c'è un albero. Cammina da P in linea retta, facendo 6 passi, fino a giungere al punto O, dove conficca un bastone. Quindi continua a camminare, sempre in linea retta, di altri 6 passi fino al punto Q. Qui si ruota di 90° e cammina, sempre in linea retta, fino al punto R, in cui ella stessa risulta allineata con l'albero e il bastone. Per raggiungere R a partire da Q Barbara compie 14 passi. Se il passo di Silvia misura 65 cm, qual è la larghezza del fiume?



Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Totale
	Punti	3	3	3	6	8	3	8	16	10	10	10	80

Punti	*0 - 3*	*4 - 8*	*9 - 13*	*14 - 19*	*20 - 25*	*26 - 31*	*32 - 37*	*38 - 43*	*44 - 49*	*50 - 55*	*56 - 61*	*62 - 67*	*68 - 72*	*73 - 76*	*77 - 80*
Voto	*2*	*3*	*3 ½*	*4*	*4 ½*	*5*	*5½*	*6*	*6 ½*	*7*	*7 ½*	*8*	*8 ½*	*9*	*10*

Soluzione

1. Dati gli insiemi $A=\{2,3,5,7\}$ e $B=\{2,4,6\}$, rappresenta mediante una r. sagittale e con una tabella a doppia entrata la relazione da A a B, R: "$La\ somma\ di\ x\ e\ y$ è $dispari$". Determina il dominio e il codominio.

A\B	2	4	6
2			
3	x	x	x
5	x	x	x
7	x	x	x

$Dominio=\{3,5,7\}$ $\quad Codominio=\{2,4,6\}$

2. Completa la tabella a lato in modo da ottenere una relazione che gode delle proprietà riflessiva e simmetrica.

A\A	1	2	3	4
1	x		x	
2		x		
3	x		x	x
4			x	x

3. Date le relazioni R_1: "x $gioca\ nella\ stessa\ squadra\ di\ y$" e R_2: "x è $fidanzato\ con\ y$" stabilisci, motivando la risposta, se sono relazioni di equivalenza. In caso affermativo determina le classi di equivalenza.

Soluzione

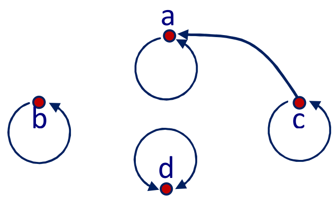
La relazione R_1 è una relazione di equivalenza perché gode delle tre proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva.

Le classi di equivalenza sono le varie squadre di calcio.

La relazione R_2 non è una relazione di equivalenza perché gode delle proprietà antiriflessiva e simmetrica e non è transitiva.

4. Data la relazione $R=\{(a;a),(c;a),(b;b),(c;c),(d;d)\}$ definita in $A=\{a,b,c,d\}$.
   - rappresentala mediante un grafo
   - stabilisci di quali proprietà gode e se è una relazione d'ordine, motivando le risposte

Soluzione



La relazione R :

- è riflessiva, perché contiene tutte le coppie del tipo $(x;x)$
- è antisimmetrica, perché l'unica coppia con due elementi diversi è $(c;\ a)$ e non c'è la coppia simmetrica $(a;c)$
- è transitiva, perché:
  $(c;a)\,,(a;a)\ \in A \quad e \quad (c;a)\ \in A$

  $(c;c)\,,(c;a)\ \in A \quad e \quad (c;a)\ \in A$

  non esistono altri casi del tipo

  $(x;\ y)\,,(y;z)\ \in A$ dove si potrebbe verificare la proprietà transitiva

La relazione R è una relazione d'ordine parziale largo.

5. Data la relazione $R = \{(a;b),(a;c),(a;d),(a;e),(a;f),(b;d),(b;f),(c;f)\}$ definita nell'insieme $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ verifica, aiutandoti con un grafo, se è una relazione d'ordine e in caso affermativo stabilisci il tipo motivando la risposta.

Soluzione

La relazione è una relazione d'ordine parziale stretto perché valgono le proprietà:

- antiriflessiva, perché non contiene le coppie del tipo $(x;x)$
- antisimmetrica, perché non ci sono coppie simmetriche $(x;\ y)$ e $(y;x)$
- transitiva, perché:
  $(a;b)\,,(b;\ f)\ \in R \quad e \quad (a;f)\ \in R$
  $(a;b)\,,(b;\ d)\ \in R \quad e \quad (a;\ d)\ \in R$
  $(a;c)\,,(c;\ f)\ \in R \quad e \quad (a;f)\ \in R$
  non esistono altri casi del tipo
  $(x;\ y)\,,(y;z)\ \in R$ dove si potrebbe verificare la proprietà transitiva.
- non è connessa, perché ci sono coppie non confrontabili.

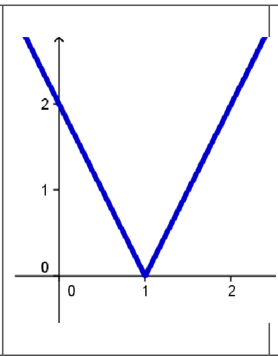
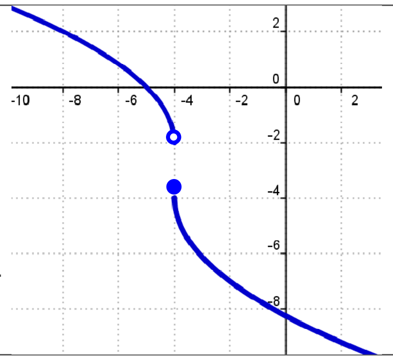
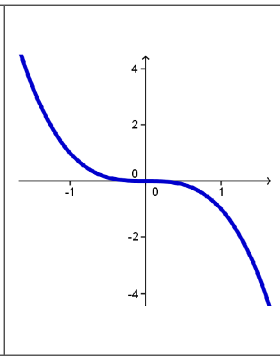
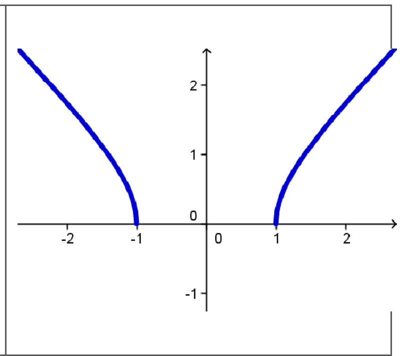
6. Stabilisci se la relazione $f : A \rightarrow B$ con $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{3,6,9,12,15\}$ individuata dalle seguenti coppie di valori $(1;3)$, $(2;6)$, $(3;9)$, $(4;12)$ è una funzione, e in caso affermativo indicane il tipo.

Soluzione

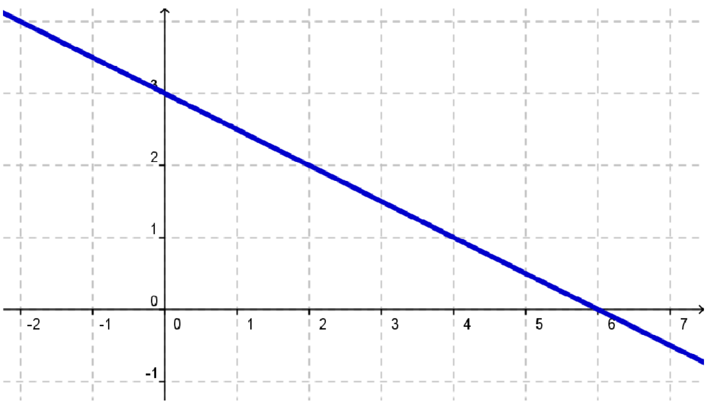
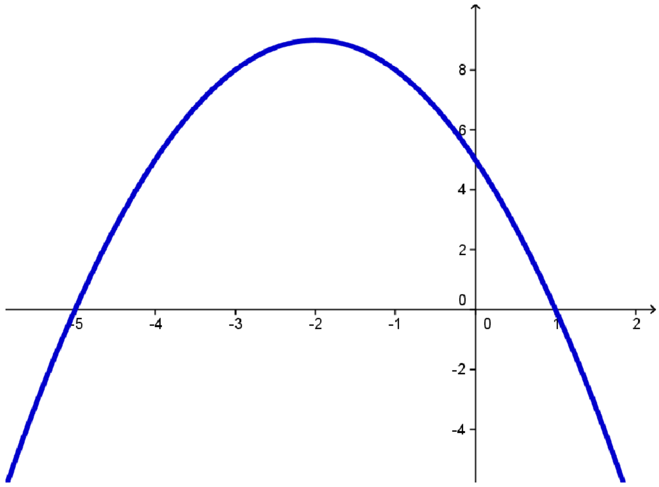
La relazione è una funzione perché verifica la definizione di funzione, cioè ogni $x \in A$ è associato a un solo $y \in B$.

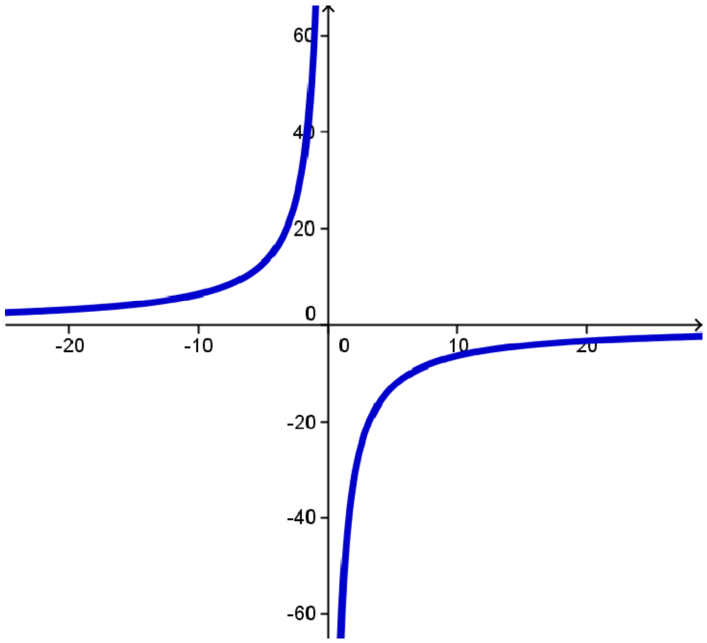
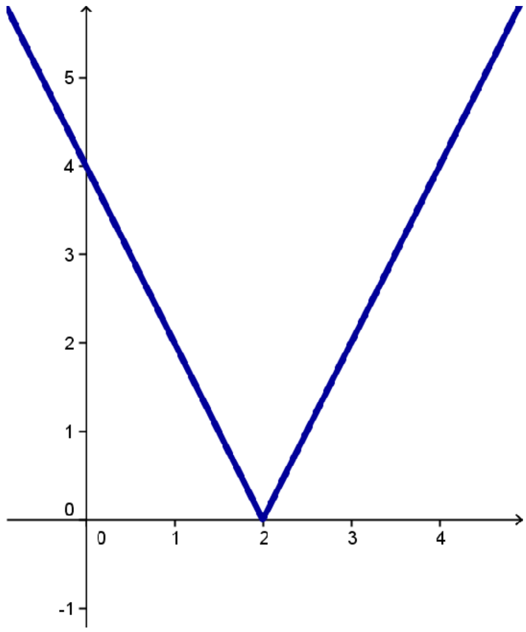
È una funzione iniettiva ma non suriettiva, perché ogni elemento dell'insieme di arrivo B è immagine al più di un elemento del dominio A.

7. Individua quali, dei grafici sottostanti, rappresentano funzioni $f: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$. Determina: il tipo, il dominio e il codominio.

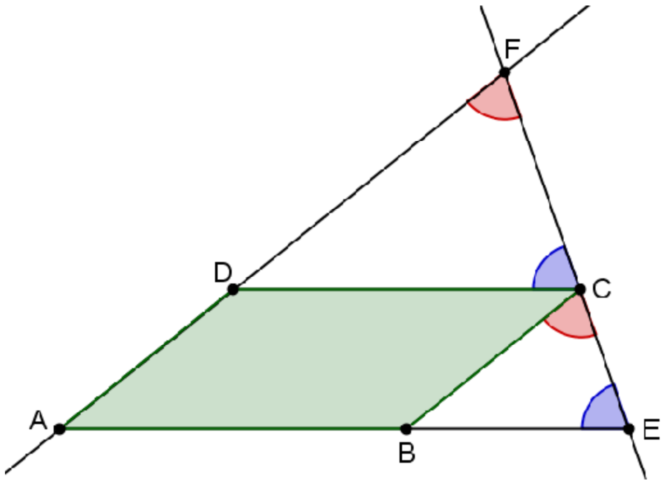
				
Funzione	☒ SI NO	☒ SI NO	☒ SI NO	☒ SI NO
Tipo	Non iniettiva Non suriettiva	Iniettiva ma non suriettiva	Biunivoca	Non iniettiva Non suriettiva
Dominio	R	R	R	$]-\infty,-1] \cup [+1,+\infty[$
Codominio	$[0,+\infty[$	$]-\infty,-4] \cup]-2,+\infty[$	R	$[0,+\infty[$

8. Traccia il grafico delle seguenti funzioni: $y = 5 - 2x$ $\quad y = -\frac{64}{x}$ $\quad y = -x^2 - 4x + 5$ $\quad y = |2x - 4|$

$y = 5 - 2x$	$y = -x^2 - 4x + 5$
	

$y = -\frac{64}{x}$	$y = \lvert 2x - 4 \rvert$
	

9. Dato un parallelogramma $ABCD$, prolunga il lato AB di un segmento $BE \cong BC$. Traccia la retta passante per E e C e indica con F il punto in cui interseca il prolungamento di AD. Dimostra che $DF \cong DC$.



Dimostrazione

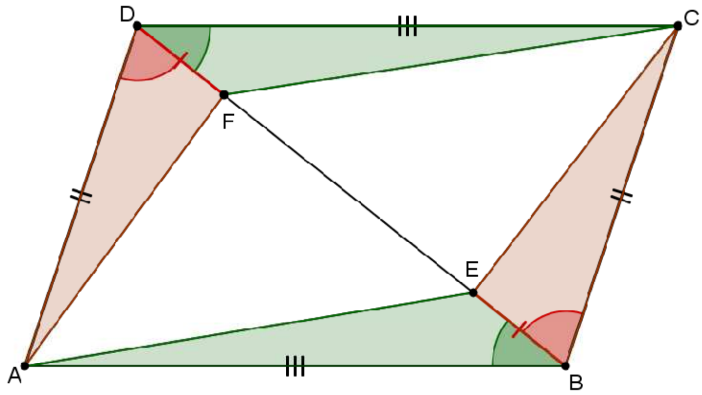
Gli angoli $B\hat{E}C \cong D\hat{C}F$ perché angoli corrispondenti delle rette parallele AE e DC tagliate dalla trasversale FE .

Gli angoli $B\hat{C}E \cong B\hat{F}C$ perché angoli corrispondenti delle rette parallele AF e BC tagliate dalla trasversale FE .

Essendo inoltre, per ipotesi, $BE \cong BC$ si ha che $B\hat{E}C \cong B\hat{C}E$.

Per la proprietà transitiva si conclude che gli angoli $D\hat{F}C \cong D\hat{C}F$ e $DF \cong DC$.

10. In un parallelogramma ABCD traccia la diagonale BD e individua su di essa due punti E e F, con F tra il punto D e il punto E e tali che DF ≅ BE. Dimostra che il quadrilatero AECF è un parallelogramma .



Dimostrazione

I triangoli $ADF \cong BCE$ per il I C.C.T.
$AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$
DF ≅ BE per ipotesi
$A\hat{D}F \cong E\hat{B}C$ perché angoli alterni interni alle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD

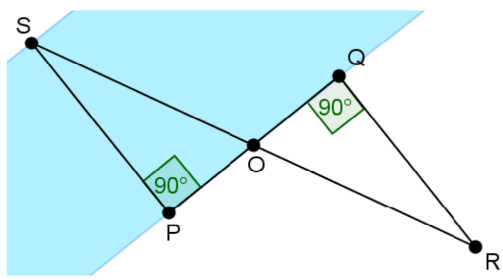
Pertanto $AF \cong EC$.

I triangoli $ABE \cong DFC$ per il I C.C.T.
$AE \cong FC$ perché lati opposti del parallelogramma $ABCD$
DF ≅ BE per ipotesi
$A\hat{B}E \cong F\hat{D}C$ perché angoli alterni interni alle rette parallele AB e DC tagliate dalla trasversale BD

Pertanto $AE \cong FC$.

Il quadrilatero $AECF$, avendo i lati opposti congruenti, è un parallelogrammo.

11. Per stimare la larghezza di un fiume Silvia procede come segue. Si pone nel punto P, di fronte al punto S, posto sulla riva opposta del fiume, dove c'è un albero. Cammina da P in linea retta, facendo 6 passi, fino a giungere al punto O, dove conficca un bastone. Quindi continua a camminare, sempre in linea retta, di altri 6 passi fino al punto Q. Qui si ruota di 90° e cammina, sempre in linea retta, fino al punto R, in cui ella stessa risulta allineata con l'albero e il bastone. Per raggiungere R a partire da Q Barbara compie 14 passi. Se il passo di Silvia misura 65 cm, qual è la larghezza del fiume?



Soluzione

I triangoli PSO e QRO sono congruenti per il III criterio di congruenza dei triangoli rettangoli.

Infatti:

$P\hat{O}S \cong Q\hat{O}R$ perché opposti al vertice

$PO \cong OQ$ per ipotesi

Si deduce quindi che: $QR \cong PS$

Pertanto la larghezza del fiume è: $\overline{PS} = 14 \cdot 65\ cm = 910\ cm = 9{,}10\ m$.