

1. Scrivi in simboli le regole dei seguenti prodotti notevoli:

Prodotto della somma per la differenza di due monomi	$(I + II) \cdot (I - II) =$
Quadrato di un trinomio	$(I + II + III)^2 =$
Quadrato di un binomio	$(I + II)^2 =$
Cubo di un binomio	$(I + II)^3 =$
Somma di due cubi	$I^3 + II^3 =$
Differenza di due cubi	$I^3 - II^3 =$
Quinta potenza di un binomio	$(I + II)^5 =$

2. Sviluppa i seguenti prodotti notevoli:

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 \quad \left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^3 \quad \frac{8}{27}x^{12} - \frac{1}{8}x^6 \quad 27a^{27} + \frac{1}{8}x^{81}$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy + 3y^4\right)^2 \quad \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}xy\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}xy\right) \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^4 \quad \left(x^{2n}y - \frac{1}{2}xy^n\right)^3$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy + 3y^4\right)\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy - 3y^4\right)$$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$(3a + b) \cdot (2a - 4b) + (2a - 3b) \cdot (3a + 5b) - (4a + 3b) \cdot (5a - 2b)$$

$$(x + 3y)^3 - 3(x + 3y)^2(x + 2y) + 3(x + 3y) \cdot (x + 2y)^2 - (x + 2y)^3$$

$$4mx^2 \cdot \left(2mx^2 - \frac{1}{3}a^2\right) \cdot \left(2mx^2 + \frac{1}{3}a^2\right) + \left(\frac{1}{3}a^2 - 2mx^2\right)^3 - \left(\frac{1}{3}a^2 + 2mx^2\right)^3 + \frac{7}{9}a^4mx^2$$

4. Esegui le seguenti divisioni fra polinomi:

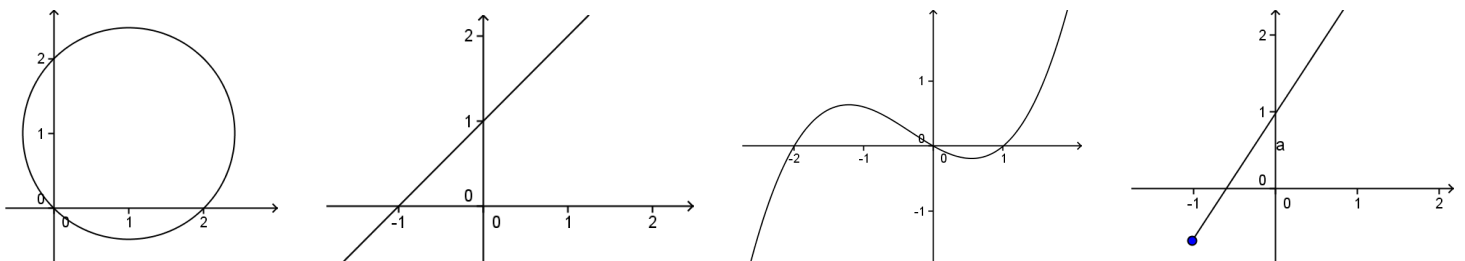
$$(6a^5 + 3a^3 + 25a^4 - 28a^2 - 8) : (5a + 3a^2 - 2) \quad (6a^5 + 3a^3 + 25a^4 - 28a^2 - 8) : (a + 3)$$

$$(x^3 + 8) : (x + 2) \quad (x^3 - 27) : (x - 3) \quad (x^4 - 16) : (x^2 + 4)$$

5. Dimostra che il quadrato di un numero naturale dispari è un numero dispari.

6. Stabilisci se la relazione $f: A \rightarrow B$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{11, 12, 13, 14\}$ individuata dalle seguenti coppie di valori $(1; 11)$, $(2; 12)$, $(3; 13)$ è una funzione, e in caso affermativo indicane il tipo.

7. Indica quali, fra i grafici sottostanti, rappresentano funzioni $f: R \rightarrow R$ specificandone il tipo (iniettiva, suriettiva, ...)



8. Traccia il grafico delle seguenti funzioni: $y = -3x + 5$ e $y = -x^2 + 2x$

Valutazione	Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	Totale
	Punti	7	18	18	20	10	8	8	4+7	100
	Voto	Punteggio grezzo / 10								

1. Scrivi in simboli le regole dei seguenti prodotti notevoli:

Prodotto della somma per la differenza di due monomi	$(I + II) \cdot (I - II) = I^2 - II^2$
Quadrato di un trinomio	$(I + II + III)^2 = I^2 + II^2 + III^2 + 2 \cdot I \cdot II + 2 \cdot I \cdot III + 2 \cdot II \cdot III$
Quadrato di un binomio	$(I + II)^2 = I^2 + II^2 + 2 \cdot I \cdot II$
Cubo di un binomio	$(I + II)^3 = I^3 + II^3 + 3 \cdot I^2 \cdot II + 3 \cdot I \cdot II^2$
Somma di due cubi	$I^3 + II^3 = (I + II) \cdot (I^2 - I \cdot II + II^2)$
Differenza di due cubi	$I^3 - II^3 = (I - II) \cdot (I^2 + I \cdot II + II^2)$
Quinta potenza di un binomio	$(I + II)^5 = I^5 + 5 \cdot I^4 \cdot II + 10 \cdot I^3 \cdot II^2 + 10 \cdot I^2 \cdot II^3 + 5 \cdot I \cdot II^4 + II^5$

2. Sviluppa i seguenti prodotti notevoli:

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 = \frac{4}{9}x^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3y$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^3 = -\frac{8}{27}x^6 - \frac{1}{8}x^3y^3 - \frac{2}{3}x^5y - \frac{1}{2}x^4y^2$$

$$\frac{8}{27}x^{12} - \frac{1}{8}y^6 = \left(\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}y^2\right) \cdot \left(\frac{4}{9}x^8 + \frac{1}{3}x^4y^2 + \frac{1}{4}y^4\right)$$

$$27a^{27} + \frac{1}{8}x^{81} = \left(3a^9 + \frac{1}{2}x^{27}\right) \cdot \left(9a^{18} + \frac{3}{2}a^9x^{27} + \frac{1}{4}y^{54}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy + 3y^4\right)^2 = \frac{4}{9}x^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 + 9y^8 + \frac{2}{3}x^3y - 4x^2y^4 - 3xy^5$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}xy\right)\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}xy\right) = \left(\frac{1}{2}xy - \frac{2}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{2}xy + \frac{2}{3}x^2\right) = \frac{1}{4}x^2y^2 - \frac{4}{9}x^4$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^4 = x^8 - 2x^7y + \frac{3}{2}x^6y^2 - \frac{1}{2}x^5y^3 + \frac{1}{16}x^4y^4$$

$$\left(x^{2n}y - \frac{1}{2}xy^n\right)^3 = x^{6n}y^3 - \frac{3}{2}x^{4n+1}y^{n+2} + \frac{3}{4}x^{2n+2}y^{2n+1} - \frac{1}{8}x^3y^{3n}$$

$$\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy + 3y^4\right)\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy - 3y^4\right) = \left[\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right) + 3y^4\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right) - 3y^4\right] =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}xy\right)^2 - (3y^4)^2 = \frac{4}{9}x^4 + \frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{2}{3}x^3y - 9y^8$$

3. Semplifica le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} &(3a + b) \cdot (2a - 4b) + (2a - 3b) \cdot (3a + 5b) - (4a + 3b) \cdot (5a - 2b) = \\ &= 6a^2 - 12ab + 2ab - 4b^2 + 6a^2 + 10ab - 9ab - 15b^2 - (20a^2 - 8ab + 15ab - 6b^2) = \\ &= 6a^2 - 12ab + 2ab - 4b^2 + 6a^2 + 10ab - 9ab - 15b^2 - 20a^2 + 8ab - 15ab + 6b^2 = \\ &= -8a^2 - 16ab - 13b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (x + 3y)^3 - 3(x + 3y)^2(x + 2y) + 3(x + 3y)(x + 2y)^2 - (x + 2y)^3 = \\
& = x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27xy^2 - (x^2 + 9y^2 + 6xy)(3x + 6y) + (3x + 9y)(x^2 + 4y^2 + 4xy) + \\
& - (x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2) = \\
& = x^3 + 27y^3 + 9x^2y + 27xy^2 - (3x^3 + 27xy^2 + 18x^2y + 6x^2y + 54y^3 + 36xy^2) + \\
& + 3x^3 + 12xy^2 + 12x^2y + 9x^2y + 36y^3 + 36xy^2 - x^3 - 8y^3 - 6x^2y - 12xy^2 = \\
& = \cancel{x^3} + 27y^3 + 9x^2y + \cancel{27xy^2} - \cancel{3x^3} - \cancel{27xy^2} - 18x^2y - 6x^2y - 54y^3 - \cancel{36xy^2} + \\
& + \cancel{3x^3} + \cancel{12xy^2} + 12x^2y + 9x^2y + 36y^3 + \cancel{36xy^2} - \cancel{x^3} - 8y^3 - 6x^2y - \cancel{12xy^2} = \\
& = (27 - 54 + 36 - 8)y^3 + (9 - 18 - 6 + 12 + 9 - 6)x^2y = \\
& = y^3 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4mx^2 \cdot \left(2mx^2 - \frac{1}{3}a^2\right) \left(2mx^2 + \frac{1}{3}a^2\right) + \left(\frac{1}{3}a^2 - 2mx^2\right)^3 - \left(\frac{1}{3}a^2 + 2mx^2\right)^3 + \frac{7}{9}a^4mx^2 = \\
& = 4mx^2 \cdot \left(4m^2x^4 - \frac{1}{9}a^4\right) + \frac{1}{27}a^6 - 8m^3x^6 - \frac{2}{3}a^4mx^2 + 4a^2m^2x^4 - \left(\frac{1}{27}a^6 + 8m^3x^6 + \frac{2}{3}a^4mx^2 + 4a^2m^2x^4\right) + \frac{7}{9}a^4mx^2 = \\
& = \cancel{16m^3x^6} - \frac{4}{9}a^4mx^2 + \frac{1}{27}a^6 - \cancel{8m^3x^6} - \frac{2}{3}a^4mx^2 + \cancel{4a^2m^2x^4} - \frac{1}{27}a^6 - \cancel{8m^3x^6} - \frac{2}{3}a^4mx^2 - \cancel{4a^2m^2x^4} + \frac{7}{9}a^4mx^2 = \\
& = \left(-\frac{4}{9} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7}{9}\right)a^4mx^2 = \\
& = \left(\frac{-4-6-6+7}{9}\right)a^4mx^2 = \\
& = \left(-\frac{9}{9}\right)a^4mx^2 = \\
& = -a^4mx^2 .
\end{aligned}$$

4. Esegui le seguenti divisioni fra polinomi:

$$(6a^5 + 3a^3 + 25a^4 - 28a^2 - 8) : (5a + 3a^2 - 2)$$

$6a^5$	$+25a^4$	$+3a^3$	$-28a^2$	-8	$3a^2 + 5a - 2$
$-6a^5$	$-10a^4$	$+4a^3$			$2a^3 + 5a^2 - 6a + 4$
$+15a^4$					
	$-15a^4$	$7a^3$			
	$-18a^3$		$-18a^2$		
	$+18a^3$	$+30a^2$	$-12a$		
		$+12a^2$	$-12a$		
		$-12a^2$	$-20a$	$+8$	
			$-32a$		

$$(6a^5 + 3a^3 + 25a^4 - 28a^2 - 8) : (a + 3)$$

	6	25	3	-28	0	-8
-3		-18	-21	54	-78	234
	6	7	-18	26	-78	226

Quoziente $q(x) = 6a^4 + 7a^3 - 18a^2 + 26a - 78$ e resto $r = 226$.

$$(x^3 + 8) : (x + 2) = x^2 - 2x + 4$$

	1	0	0	$+8$
-2		-2	$+4$	-8
	1	-2	$+4$	0

Oppure applicando il prodotto notevole: $I^3 + II^3 = (I + II) \cdot (I^2 - I \cdot II + II^2)$

$$(x^3 - 27) : (x - 3) = x^2 + 3x + 9$$

	1	0	0	-27
$+3$		$+3$	$+9$	$+27$
	1	$+3$	$+9$	0

Oppure applicando il prodotto notevole: $I^3 - II^3 = (I - II) \cdot (I^2 + I \cdot II + II^2)$

$$(x^4 - 16) : (x^2 + 4) = x^2 - 4$$

Senza effettuare la divisione, basta applicare il prodotto notevole: $(I + II) \cdot (I - II) = I^2 - II^2$

5. Dimostra che il quadrato di un numero naturale dispari è un numero dispari.

Un numero dispari può essere scritto nella forma: $2n + 1$

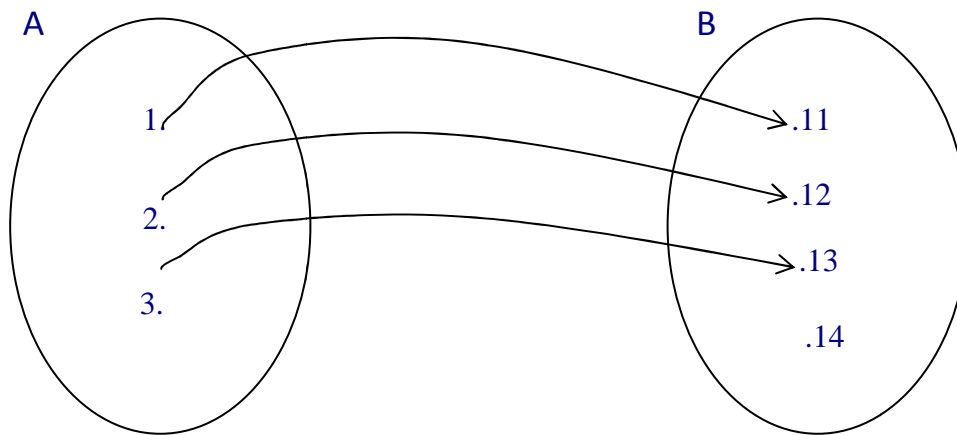
Il suo quadrato è: $(2n + 1)^2$

Sviluppando i calcoli si ottiene: $(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$.

$4n^2 + 4n + 1$ è un numero dispari,

perché è la somma di due numeri pari $4n^2$ e $4n$ e del numero 1.

6. Stabilisci se la relazione $f: A \rightarrow B$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{11, 12, 13, 14\}$ individuata dalle seguenti coppie di valori $(1; 11)$, $(2; 12)$, $(3; 13)$ è una funzione, e in caso affermativo indicane il tipo.



Si tratta di una funzione iniettiva ma non suriettiva

Iniettiva, perché elementi differenti del dominio hanno elementi corrispondenti differenti nel codominio.

Non è suriettiva, perché l'elemento $14 \in B$ non ha una controimmagine nel dominio A.

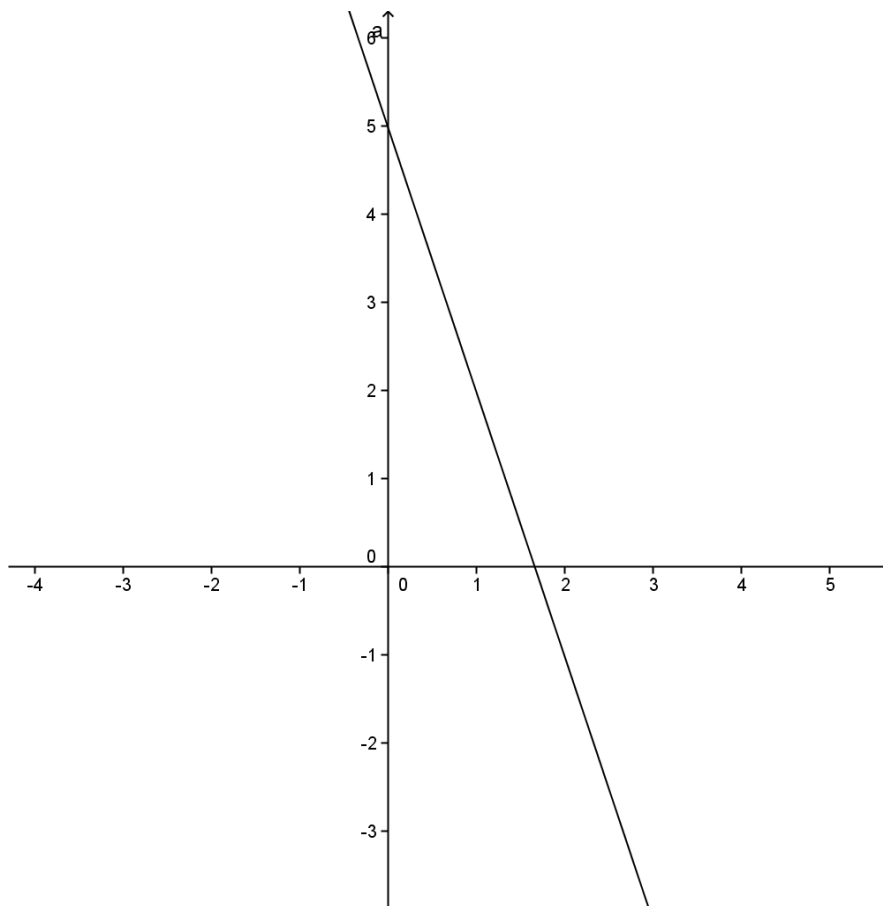
7. Indica quali, fra i grafici sottostanti, rappresentano funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ specificandone il tipo (iniettiva, suriettiva,...)

Non è una funzione	Funzione biunivoca	Funzione suriettiva ma non iniettiva	Funzione iniettiva ma non suriettiva

8. Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = -3x + 5$$

x	y
0	5
2	-1



$$y = -x^2 + 2x$$

x	y
-2	-8
-1	-3
0	0
1	1
2	0
3	-3
4	-8

