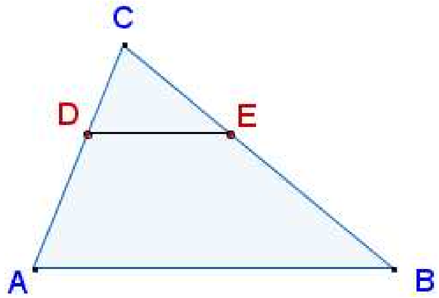
# SIMILITUDINE

Esempio 1




Sia ABC un triangolo in cui $\overline{AB} = 15\ cm$ , $\overline{AC} = 12\ cm$ e $\overline{BC} = 18\ cm$ . Determina la lunghezza della corda DE, parallela ad AB, con D sul lato AC ed E sul lato BC, tale che $DE \cong AD + EB$ .

*Soluzione*

I triangoli ABC e DEC sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo $\hat{C}$ in comune.*

*Gli angoli $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDC}$ angoli corrispondenti fra le rette parallele AB e DE tagliate dalla trasversale AC.*

Ponendo la misura di $\overline{DE} = x$ , $0 < x < 15$

Il rapporto di similitudine è $k = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{x}{15}$.

$\overline{CD} = k \cdot \overline{AC} = \frac{x}{15} \cdot 12 = \frac{4}{5}x$ $\qquad$ $\overline{CE} = k \cdot \overline{BC} = \frac{x}{15} \cdot 18 = \frac{6}{5}x$

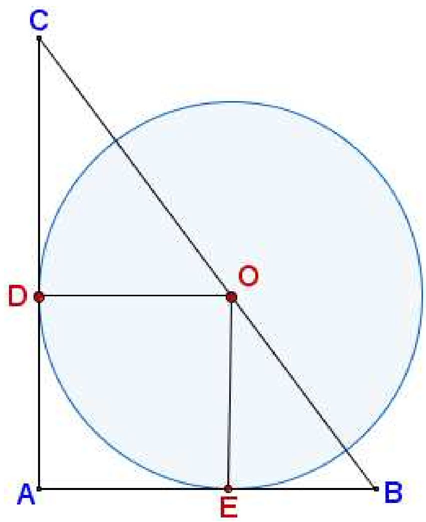
$\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = 12 - \frac{4}{5}x$ $\qquad$ $\overline{EB} = \overline{BC} - \overline{CE} = 18 - \frac{6}{5}x$

Sostituendo nella relazione $\mathrm{DE} \cong \mathrm{AD} + \mathrm{EB}$ si ottiene:

$x = 12 - \frac{4}{5}x + 18 - \frac{6}{5}x$ ; $\qquad$ $5x = 60 - 4x + 90 - 6x$ ; $\qquad$ $15x = 150$ ; $\qquad$ $x = 10$ .

Pertanto la lunghezza della corda è $\overline{DE} = 10\ cm$ .

Esempio 2




Sia ABC un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi $\overline{AB} = 42\ cm$ , $\overline{AC} = 56\ cm$ , circoscritto ad un semicerchio. Determina la misura del raggio del semicerchio.

*Soluzione*

I triangoli OCD e OBE sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*Gli angoli $\widehat{DOC} \cong \widehat{EBO}$ angoli corrispondenti fra le rette parallele AB e DO tagliate dalla trasversale BC.*

*Gli angoli $\widehat{ADO} \cong \widehat{OEB}$ perché angoli entrambi retti.*

Pertanto hanno i lati corrispondenti proporzionali: $\frac{CD}{OE} = \frac{OD}{EB}$ .

Ponendo la misura di $\overline{OD} = \overline{OE} = x$ , $0 < x < 42$ si ottiene:

$\overline{CD} = \overline{AC} - \overline{AD} = 42 - x$ e $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 56 - x$

Sostituendo nella proporzione $CD : OE = OD : EB$ si ottiene:

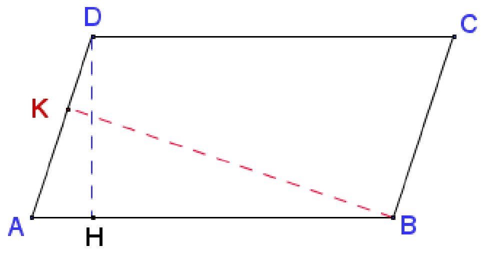
$$\frac{42 - x}{x} = \frac{x}{56 - x} \ ; \qquad C.E.: \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 56 .$$

$(42 - x) \cdot (56 - x) = x^2$ ; $\qquad$ $2352 - 42x - 56x + x^2 = x^2$ ; $\qquad$ $98x = 2352$ ; $\qquad$ $x = 24$ .

Pertanto la misura del raggio del semicerchio è $r = \overline{OD} = 24\ cm$ .

## Problema 482.165

In un parallelogramma ABCD, risulta $\overline{AB} = 12\ cm$ e $\overline{BC} = 6\ cm$ . Sapendo che l'altezza relativa ad AD supera di $4\ cm$ quella relativa ad AB, determina l'area del parallelogramma.




*Soluzione*

I triangoli ADH e ABK sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo $\hat{A}$ in comune.*

*Gli angoli $\widehat{AHD} \cong \widehat{AKB}$ perché entrambi retti.*

Pertanto hanno i lati corrispondenti proporzionali: $AD : AB = DH : BK$ .

Ponendo $\overline{DH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{BK} = x + 4$ .

Sostituendo si ha: $\frac{6}{12} = \frac{x}{x+4}$ ; $\qquad C.E.: \quad x \neq -4$ .

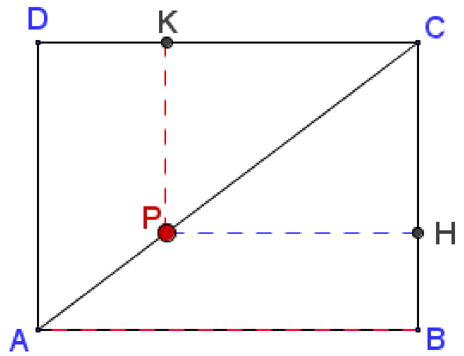
$6 \cdot (x + 4) = 12x$ ; $\quad 6x + 24 = 12x \qquad 6x = 24$ ; $\qquad x = 4$ .

Pertanto $\overline{DH} = 4\ cm$ .

L'area del parallelogramma è : $S = \overline{AB} \cdot \overline{DH} = 12 \cdot 4\ cm^2 = 48\ cm^2$.

## Problema 482.166

In un rettangolo ABCD, risulta $\overline{AB} = 8a$ e $\overline{BC} = 6a$ . Un punto P, appartenente alla diagonale AC, è tale che la somma delle sue distanze da BC e da CD è $\frac{7}{2}a$. Calcola la distanza di P da C.




*Soluzione*

I triangoli ABC e PHC sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo $\hat{C}$ in comune.*

*Gli angoli $\widehat{ABC} \cong \widehat{PHC}$ perché entrambi retti.*

Pertanto hanno i lati corrispondenti proporzionali: $AB : PH = BC : CH$ .

Ponendo la misura di $\overline{PH} = x$ , $0 < x < 8a$ si ottiene:

$$8a : x = 6a : \overline{CH} ; \qquad \overline{CH} = \frac{6a \cdot x}{8a} = \frac{3}{4}x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{PK} = \frac{3}{4}x$$

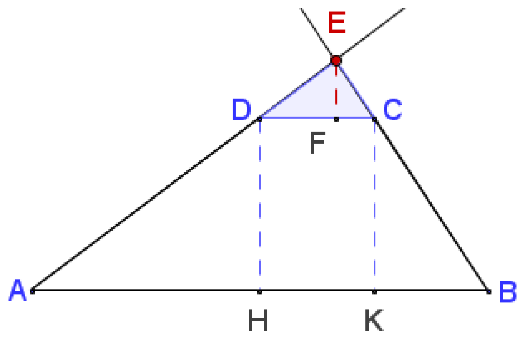
Sostituendo nella relazione: $\overline{PH} + \overline{PK} = \frac{7}{2}a$ si ottiene:

$$x + \frac{3}{4}x = \frac{7}{2}a ; \quad 4x + 3x = 14a ; \quad 7x = 14a ; \quad x = 2a ,$$

Pertanto $\overline{PH} = 2a$ e $\overline{PK} = \frac{3}{4} \cdot 2a = \frac{3}{2}a$ .

La distanza $\overline{PC} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{PK}^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{\frac{16+9}{4}a^2} = \frac{5}{2}a$ .

In un trapezio ABCD, di base maggiore AB e base minore CD risulta $\overline{AB} = 16a$ , $\overline{BC} = 3a\sqrt{5}$ , $\overline{CD} = 6a$ , $\overline{DA} = 5a$ . Detto E il punto di intersezione dei lati obliqui del trapezio, determina le misure dei lati DE e EC del triangolo DEC.




*Soluzione*

I triangoli ABE e DCE sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo* $\hat{E}$ *in comune.*

*Gli angoli* $\widehat{ABC} \cong \widehat{DCE}$ *angoli corrispondenti fra le rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale BC.*

Pertanto hanno i lati corrispondenti proporzionali: $AB : CD = AE : DE$ .

Ponendo $\overline{DE} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} = x + 5a$ .

Sostituendo i dati nella proporzione si ottiene:

$16a : 6a = (x + 5a) : x$ ; $\quad 16a \cdot x = 6a \cdot (x + 5a)$ ; $\quad 16ax = 6ax + 30a^2$ ; $\quad 10ax = 30a^2$ ; $\quad x = 3a$ .

Dalla proporzionalità degli altri due lati si ottiene: $AB : CD = BE : CE$

Ponendo $\overline{CE} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{BE} = x + 3a\sqrt{5}$ .

Sostituendo i dati nella proporzione si ottiene:

$16a : 6a = \left(x + 3a\sqrt{5}\right) : x$ ; $\quad 16a \cdot x = 6a \cdot \left(x + 3a\sqrt{5}\right)$ ; $\quad 16ax = 6ax + 18\sqrt{5}a^2$ ;

$10ax = 18\sqrt{5}a^2$ ; $\quad x = \frac{9}{5}a\sqrt{5}$ .

Volendo calcolare l'altezza del trapezio si procede nel seguente modo:

Poniamo $\overline{AH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{KB} = 16a - 6a - x = 10a - x$ .

Dal triangolo rettangolo ADH si ottiene: $\overline{DH}^2 = 25a^2 - x^2$

Dal triangolo rettangolo BCK si ottiene: $\overline{CK}^2 = 45a^2 - (10a - x)^2$

Essendo $\overline{DH} \cong \overline{CK}$ si ottiene: $25a^2 - x^2 = 45a^2 - (10a - x)^2$ ;

$25a^2 - x^2 = 45a^2 - 100a^2 - x^2 + 20ax$ ;

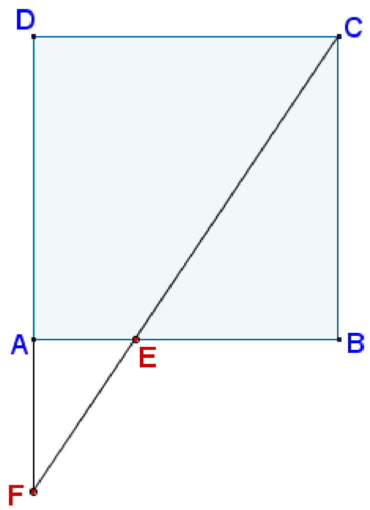
$25a^2 = 45a^2 - 100a^2 + 20ax$ ;

$20ax = 80a^2$ ;

$x = 4a$ .

Pertanto $\quad \overline{AH} = 4a \qquad \overline{KB} = 6a \qquad \overline{DH} = \sqrt{25a^2 - (4a)^2} = \sqrt{25a^2 - 16a^2} = 3a$ .

Problema 483.178




Un quadrato ABCD ha il lato che misura $a$. Una semiretta di origine C interseca AB in E e il prolungamento di AD in F. Determina la distanza di E da A, in modo che il rapporto fra l'area di AEF e l'area di EBC sia 4.

*Soluzione*

I triangoli AEF e EBC sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo* $\widehat{AEF} \cong \widehat{BEC}$ *perché angoli opposti al vertice E.*

*Gli angoli* $\widehat{FAE} \cong \widehat{CBE}$ *perché entrambi angoli retti..*

Il rapporto fra l'area di AEF e l'area di EBC rappresenta il quadrato del rapporto di similitudine: $k^2 = \frac{D_{AEF}}{D_{EBC}} = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 2$.

Ponendo $\overline{AE} = x$ con $0 < x < a \quad \Rightarrow \quad \overline{EB} = a - x$.

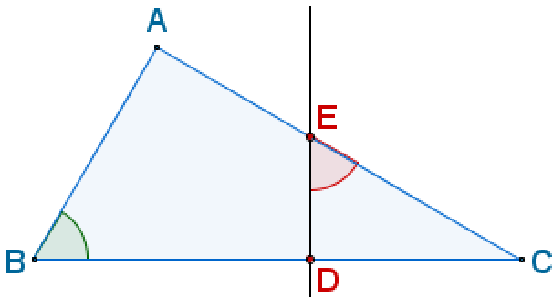
I triangoli AEF e EBC hanno i lati corrispondenti proporzionali con rapporto di similitudine $k = 2$ :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = k\,; \qquad \frac{x}{a-x} = 2\,; \qquad C.E.:\ x \neq a\,.$$

$$x = 2 \cdot (a - x); \qquad x = 2a - 2x\,; \qquad 3x = 2a\,; \qquad x = \frac{2}{3}a\,.$$

Pertanto $\overline{AE} = \frac{2}{3}a$.

Problema 483.179




In un triangolo rettangolo ABC, il cateto AB misura $12a$ e l'ipotenusa BC misura $20a$. La perpendicolare a BC, condotta da un punto D appartenente a BC, interseca AC in E. Sapendo che l'area di ABDE è il triplo dell'area del triangolo DEC, determina la distanza di D da C.

*Soluzione*

I triangoli ABC e DEC sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo* $\hat{C}$ *è in comune.*

*Gli angoli* $\widehat{BAC} \cong \widehat{EDC}$ *perché angoli entrambi retti.*

Dai dati del problema è possibile ricavare il rapporto di similitudine fra il triangolo ABC e il triangolo DEC.

$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{DEC}} = \frac{S_{ABDE} + S_{DEC}}{S_{DEC}} = \frac{3 \cdot S_{DEC} + S_{DEC}}{S_{DEC}} = \frac{4 \cdot S_{DEC}}{S_{DEC}} = 4\,.$$

Pertanto il rapporto di similitudine fra il triangolo ABC e il triangolo DEC è $k = \sqrt{4} = 2$.

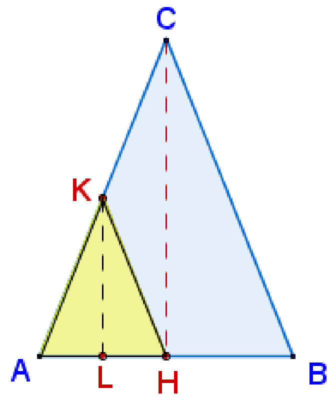
Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^{\,2} - \overline{AB}^{\,2}} = \sqrt{(20a)^2 - (12a)^2} = \sqrt{400a^2 - 144a^2} = \sqrt{256a^2} = 16a\,.$$

Dalla similitudine dei triangoli ABC e DEC si ottiene la misura di DC.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = 2\,; \qquad \frac{16a}{\overline{DC}} = 2\,; \qquad 16a = 2 \cdot \overline{DC}\,; \qquad \overline{DC} = 8a\,.$$

Problema 483.183




Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB in cui $\overline{AB} = 12a$ e $\overline{BC} = \overline{AC} = 10a$ .
Detta CH l'altezza relativa ad AB, traccia da H la parallela a BC che incontra AC in K.
Determina l'area del trapezio HBCK.

*Soluzione*

I triangoli AHK e ABC sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo $\hat{A}$ in comune.*

*Gli angoli $\widehat{AHK} \cong \widehat{ABC}$ angoli corrispondenti fra le rette parallele HK e BC tagliate dalla trasversale AB.*

Pertanto i triangoli hanno i lati corrispondenti proporzionali: $HK : BC = AH : AB$ .

Pertanto anche il triangolo AHK è isoscele. Quindi $\overline{AL} = \overline{LH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AB} = 3a$ .

$\overline{HK} : 10a = 6a : 12a$ ; $\qquad \overline{HK} = \dfrac{10a \cdot 6a}{12a} = 5a$ .

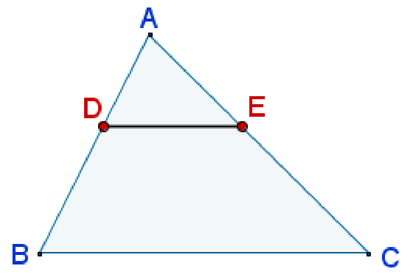
Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo LHK si ha:

$$\overline{KL} = \sqrt{\overline{HK}^{\,2} - \overline{LH}^{\,2}} = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{25a^2 - 9a^2} = \sqrt{16a^2} = 4a .$$

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^{\,2} - \overline{HB}^{\,2}} = \sqrt{(10a)^2 - (6a)^2} = \sqrt{100a^2 - 36a^2} = \sqrt{64a^2} = 8a .$$

$$S_{HBCK} = S_{ABC} - S_{AHK} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} - \frac{\overline{AH} \cdot \overline{KL}}{2} = \frac{12a \cdot 8a}{2} - \frac{6a \cdot 4a}{2} = 48a^2 - 12a^2 = 36a^2 .$$

Problema 483.185




In un triangolo ABC, il lato BC è lungo 12 $cm$ e l'altezza a essa relativa è lunga 8 $cm$. Una corda DE del triangolo ($D \in AB$ ed $E \in AC$) parallela a BC è tale che l'area del trapezio BDEC è $\frac{5}{4}$ dell'area del triangolo ADE. Determina la lunghezza di DE.

<u>*Soluzione*</u>

Dai dati del problema è possibile ricavare il rapporto di similitudine fra il triangolo ABC e il triangolo ADE.

$$k^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \frac{S_{ADE} + S_{BDEC}}{S_{ADE}} = \frac{S_{ADE} + \frac{5}{4} S_{ADE}}{S_{ADE}} = \frac{\frac{9}{4} S_{ADE}}{S_{ADE}} = \frac{9}{4}.$$

Pertanto il rapporto di similitudine fra il triangolo ABC e il triangolo ADE è $k = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

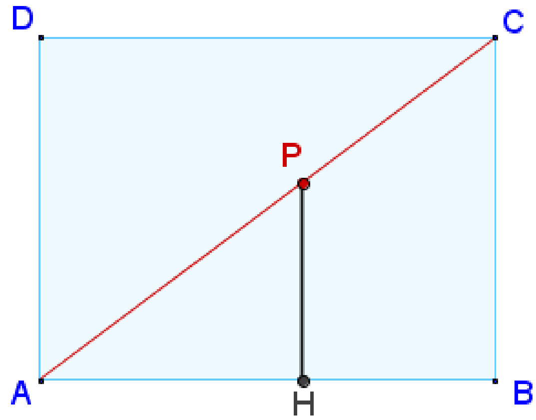
I triangoli ABC$\sim ADE$ sono simili per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo $\hat{A}$ in comune.*

*Gli angoli $\widehat{ABC} \cong \widehat{ADE}$ angoli corrispondenti fra le rette parallele BC e DE tagliate dalla trasversale AB.*

Pertanto i triangoli hanno i lati corrispondenti proporzionali con rapporto di similitudine $k = \frac{3}{2}$.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{3}{2}\,; \qquad 3 \cdot \overline{DE} = 2 \cdot \overline{BC}\,; \qquad \overline{DE} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BC} = \frac{2}{3} \cdot 12\ cm = 8\ cm\,.$$




Un rettangolo ha perimetro $28\,cm$ e il lato $AB$ è i $\frac{4}{3}$ di $BC$. Determina un punto P, sulla diagonale $AC$, in modo che indicata con $H$ la proiezione di $P$ su $AB$, l'area del trapezio $PHBC$ sia uguale a $22{,}5\,cm^2$.

<u>*Soluzione*</u>

Ponendo la misura di $\overline{BC} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{4}{3}x$ .

Conoscendo la misura del perimetro si ha:

$2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) = 28\,cm\,; \qquad \overline{AB} + \overline{BC} = 14\,;$

$\frac{4}{3}x + x = 14\,; \qquad 4x + 3x = 42\,; \qquad 7x = 42\,; \qquad x = 6\,.$

Pertanto $\overline{BC} = 6\,cm$ e $\overline{AB} = \frac{4}{3} \cdot 6\,cm = 8\,cm$ .

La misura della diagonale è $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(8\,cm)^2 + (6\,cm)^2} = \sqrt{100\,cm^2} = 10\,cm$ .

I triangoli ABC~APH per il 1° C. S. T. Infatti:

*L'angolo $\hat{A}$ in comune.*

*Gli angoli $\widehat{ABC} \cong \widehat{AHP}$ perché entrambi retti.*

Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione: $\mathrm{AC} : \mathrm{AP} = \mathrm{AB} : \mathrm{AH}$ .

Ponendo la misura di $\overline{AP} = y$ , $0 < y < 10$ si ottiene :

$10 : y = 8 : \overline{AH}\,; \qquad \overline{AH} = \frac{8}{10}y\,; \qquad \overline{AH} = \frac{4}{5}y$

Conoscendo l'area del trapezio, è possibile determinare il rapporto di similitudine dei triangoli simili ABC e APH .

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APH}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}}{S_{ABC} - S_{PHBC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6}{24 - \frac{45}{2}} = \frac{24}{\frac{48 - 45}{2}} = 24 \cdot \frac{2}{3} = 16\,.$$

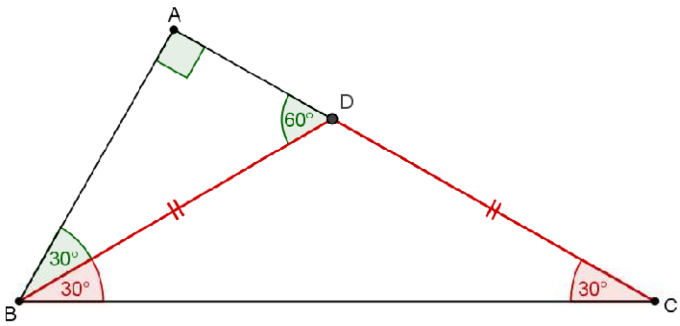
Essendo $k^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad k = 4$ .

Dalla similitudine dei triangoli $ABC \sim APH$ si ha:

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AP}}} = 4\,; \qquad \overline{\mathrm{AC}} = 4 \cdot \overline{\mathrm{AP}}\,; \qquad \overline{AP} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{4} \cdot 10\,cm = 2{,}5\,cm\,.$

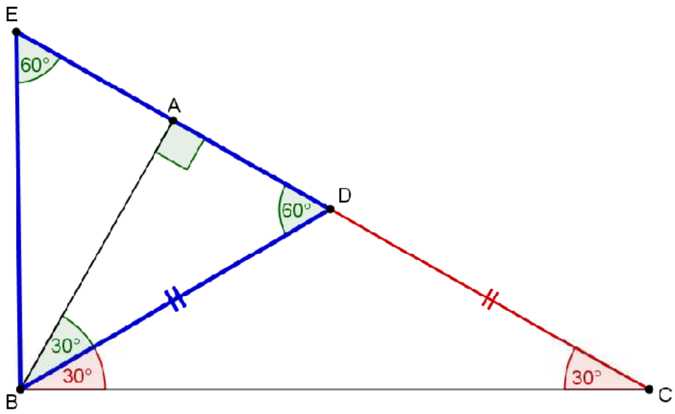
Un triangolo rettangolo $ABC$ ha l'angolo $\hat{B} = 60°$. La bisettrice $BD$ dell'angolo $\hat{B}$ misura 6 $cm$ . Calcola il perimetro del triangolo $ABC$ .

<u>*Soluzione*</u>




La bisettrice divide l'angolo $\hat{B} = 60°$ in due angoli di 30°, quindi il triangolo $BCD$ è isoscele.

Pertanto $\overline{BD} = \overline{CD} = 6\ cm$ .




Il triangolo $ADB$ è la metà di un triangolo equilatero.

Pertanto $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{BD} = 3\ cm$ .

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ABD$ si ha:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2}\ cm =$$

$$= \sqrt{36 - 9}\ cm = \sqrt{27}\ cm = 3\sqrt{3}\ cm\ .$$

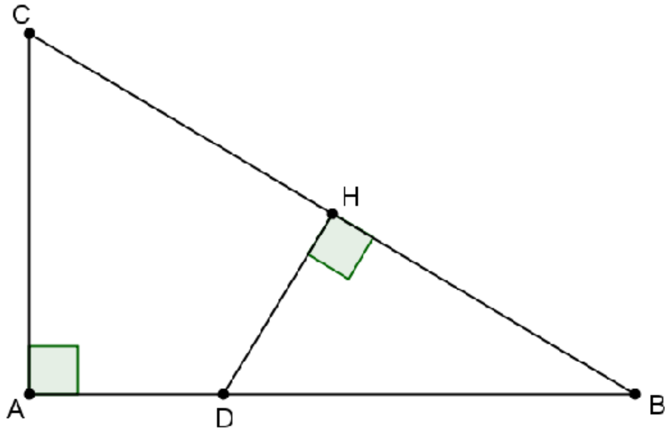
Pertanto $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD} = (3 + 6)\ cm = 9\ cm$ .

Mentre $\overline{BC} = 2\ \overline{AB} = 6\sqrt{3}\ cm$ .

La misura del perimetro del triangolo $ABC$ è:

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \left(3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9\right) cm = \left(9\sqrt{3} + 9\right) cm = 9\left(\sqrt{3} + 1\right) cm\ .$$

Nel triangolo rettangolo $ABC$ raffigurato a lato, $\overline{AC} = 12\ cm$ $\overline{AB} = 16\ cm$ , $\overline{BH} = \overline{HC}$ , $D\widehat{H}B = 90°$ .
Calcola l'area del triangolo $PBH$.




*Soluzione*

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ABC$ si ha:

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2}\ cm =$

$= \sqrt{256 + 144}\ cm = \sqrt{400}\ cm = 20\ cm$

Pertanto $\overline{BH} = \overline{HC} = 10\ cm$ .

I triangoli $ABC$ e $BDH$ sono simili. Infatti:

L'angolo $\widehat{B}$ è in comune
$\widehat{A} \cong B\widehat{H}D$ perché entrambi retti.

Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione:

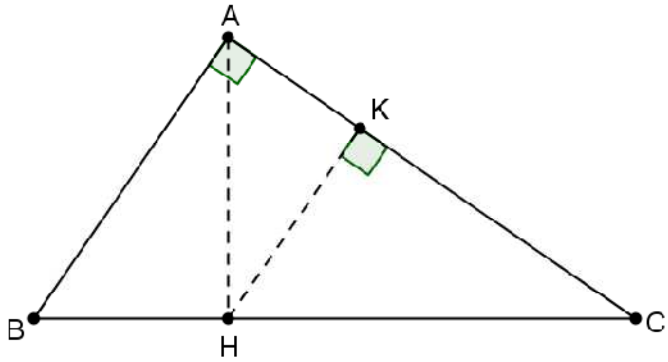
$\overline{BH} : \overline{AB} = \overline{DH} : \overline{AC}$ ;

$10 : 16 = \overline{DH} : 12$ ; $\overline{DH} = \frac{10 \cdot 12}{16}\ cm = \frac{15}{2}\ cm$

In definitiva l'area vale:

$S_{BDH} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{DH} = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2}\right) cm^2 = \frac{75}{2}\ cm^2$

Nel triangolo rettangolo $ABC$ raffigurato a lato, $\overline{AB} = 9\ cm$ , $\overline{AC} = 12\ cm$ e $H\widehat{K}C = 90°$ . Calcola il perimetro del triangolo $AHK$.




_Soluzione 1_

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ABC$ si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{9^2 + 12^2}\ cm =$$

$$= \sqrt{81 + 144}\ cm = \sqrt{225}\ cm = 15\ cm$$

L'area del triangolo $ABC$ è:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12\ cm^2 = 54\ cm^2$$

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{AH} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{2 \cdot 54}{15}\ cm = \frac{36}{5}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $AHC$ si ha:

$$\overline{HC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{144 - \frac{1296}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{2304}{25}}\ cm = \frac{48}{5}\ cm\ .$$

Inoltre i triangoli $ABC$ e $CHK$ sono simili. Infatti:
L'angolo $\hat{C}$ è in comune
$\hat{A} \cong C\widehat{K}H$ perché entrambi retti.

Pertanto hanno i lati corrispondenti in proporzione:

$\overline{HK} : \overline{AB} = \overline{HC} : \overline{BC}$ ;

$\overline{HK} : 9 = \frac{48}{5} : 15$ ; $\qquad \overline{HK} = \frac{9 \cdot \frac{48}{5}}{15}\ cm = 9 \cdot \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{15}\ cm = \frac{144}{25}\ cm$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $AHK$ si ha:

$$\overline{AK} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{HK}^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{5}\right)^2 - \left(\frac{144}{25}\right)^2}\ cm = \sqrt{\frac{1296}{25} - \frac{20736}{625}}\ cm = \sqrt{\frac{32400-20736}{625}}\ cm = \sqrt{\frac{11664}{625}}\ cm = \frac{108}{25}\ cm$$

La misura del perimetro del triangolo $AHK$ è:

$$2p_{AHK} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{AK} = \left(\frac{36}{5} + \frac{144}{25} + \frac{108}{25}\right)\ cm = \frac{180 + 144 + 108}{25}\ cm = \frac{432}{25}\ cm\ .$$

_Soluzione 2_

Dopo aver determinato le misure dell'ipotenusa $BC$ e dell'altezza relativa all'ipotenusa $AH$ , si sfrutta la similitudine dei triangoli $ABC$ e $AHK$ :

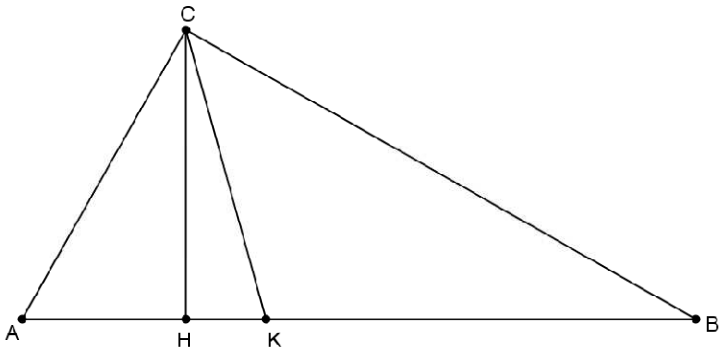
$\overline{AH} : \overline{BC} = \overline{HK} : \overline{AC}$ ;

$\frac{36}{5} : 15 = \overline{HK} : 12$ ; $\qquad \overline{HK} = 12 \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{1}{15}\ cm = \frac{144}{25}\ cm$

Si calcola in seguito, con il T. di Pitagora, la misura di $\bar{A}$ .

Problema 292.202

In un triangolo rettangolo $ABC$ , di cateti 16 $cm$ e 12 $cm$ , traccia l'altezza $CH$ relativa all'ipotenusa $AB$ e la bisettrice $CK$ dell'angolo retto. Calcola l'area del triangolo $CHK$.




<u>Soluzione</u>

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ABC$ si ha:

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{12^2 + 16^2}\ cm =$

$= \sqrt{400}\ cm = 20\ cm$

L'area del triangolo $ABC$ vale:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16\right) cm^2 = 96\ cm^2$ .

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$\overline{CH} = \dfrac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{AB}} = \dfrac{2 \cdot 96}{20} cm = \dfrac{48}{5} cm$ .

Ricordando il T. della bisettrice:

*"La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri due lati",*

si ottiene:

$\overline{AK} : \overline{KB} = \overline{AC} : \overline{BC}$ $\qquad$ $\overline{AK} : \overline{KB} = 12 : 16$ ;

Ponendo $\overline{AK} = x$ $\quad \Rightarrow \quad$ $x : \overline{KB} = 12 : 16$ ; $\qquad$ $\overline{KB} = \frac{16x}{12} = \frac{4}{3}x$ .

Considerando che: $\overline{AK} + \overline{KB} = 20$ si ha:

$x + \dfrac{4}{3}x = 20$ ; $\qquad 3x + 4x = 60$ ; $\qquad 7x = 60$ ; $\qquad x = \dfrac{60}{7}$

Pertanto $\overline{AK} = \frac{60}{7}\ cm$ e $\overline{KB} = \frac{4}{3} \cdot \frac{60}{7} = \frac{80}{7}\ cm$ .

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ACH$ si ha:

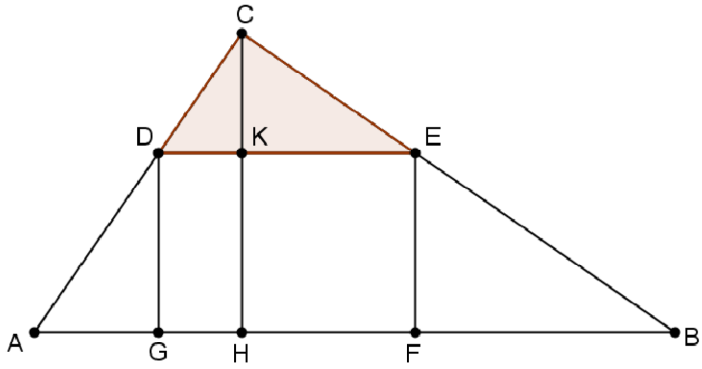
$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{48}{5}\right)^2}\ cm = \sqrt{144 - \frac{2304}{25}}\ cm = \sqrt{\frac{1296}{25}}\ cm = \frac{36}{5}\ cm$ .

Si ricava quindi: $\overline{HK} = \overline{AK} - \overline{AH} = \left(\frac{60}{7} - \frac{36}{5}\right)\ cm = \frac{300-252}{35} = \frac{48}{35}\ cm$ .

In definitiva l'area vale:

$S_{CHK} = \dfrac{1}{2}\overline{HK} \cdot \overline{CH} = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{48}{35} \cdot \dfrac{48}{5}\right) cm^2 = \dfrac{1152}{175}\ cm^2$

Un rettangolo di perimetro 28 $cm$ è inscritto in un triangolo di base $\overline{AB} = 16\ cm$ e altezza $\overline{CH} = 12\ cm$ . Calcola le dimensioni del rettangolo.




*Soluzione*

I triangoli $ABC$ e $CDE$ sono simili. Infatti:
L'angolo $\hat{C}$ è in comune
$\hat{A} \cong C\hat{D}E$ perché corrispondenti ….
$\hat{B} \cong D\hat{E}C$ perché corrispondenti ….

Ricordando il teorema:

*"In due triangoli simili le basi sono proporzionali alle rispettive altezze"*

si ha:

$\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CH} : \overline{CK}$

Ponendo $\overline{DG} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{CK} = \overline{CH} - \overline{DG} = 12 - x \qquad \overline{DE} = 14 - x$

$16 : (14 - x) = 12 : (12 - x)$ ;

$12 \cdot (14 - x) = 16 \cdot (12 - x)$ ;

$168 - 12x = 192 - 16x$ ;

$-12x + 16x = 192 - 168$ ;

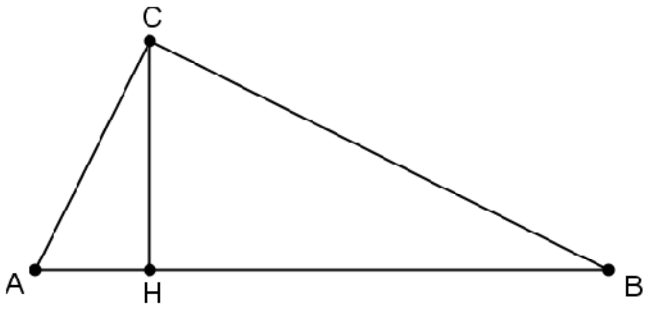
$4x = 24$ ;

$x = 6$ .

Pertanto $\overline{DG} = 6\ cm$ è $\overline{DE} = 8\ cm$ .

Problema 214.173

L'area di un triangolo rettangolo è 80 $cm^2$ e l'ipotenusa è lunga 20 $cm$ . Calcola la misura dei cateti.




*Soluzione 1*

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2\,S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 80}{20}\ cm = 8\ cm\ .$$

I triangoli $ACH$ e $BCH$ sono simili. Infatti:

$A\hat{H}C \cong B\hat{H}C \cong 90°$ .

$A\hat{C}H \cong 90° - H\hat{C}B \cong \hat{B}$

Pertanto i lati corrispondenti sono proporzionali:

$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{CH} : \overline{HB}$

Ponendo $\overline{AH} = x$ e $\overline{HB} = 20 - x$ si ottiene:

$x : 8 = 8 : (20 - x)$ ; $\quad x \cdot (20 - x) = 8 \cdot 8$ ; $\quad 20x - x^2 = 64$ ;

$x^2 - 20x + 64 = 0$ ; $\quad \frac{\Delta}{4} = 10^2 - 64 = 36$ ; $\quad x_{1,2} = 10 \mp 6 = \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 16 \end{matrix}$

Pertanto $\overline{AH} = 4\ cm$ e $\overline{HB} = 16\ cm$ .

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ACH$ si ha:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}\ cm = \sqrt{64 + 16}\ cm = \sqrt{80}\ cm = 4\sqrt{5}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $BCH$ si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2}\ cm = \sqrt{64 + 256}\ cm = \sqrt{320}\ cm = 8\sqrt{5}\ cm$$

*Soluzione 2*

L'altezza relativa all'ipotenusa misura:

$$\overline{CH} = \frac{2\,S_{ABC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \cdot 80}{20}\ cm = 8\ cm\ .$$

Ponendo $\overline{AH} = x \Rightarrow \overline{HB} = 20 - x$

Applicando il II T. di Euclide al triangolo $ABC$ si ha:

$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$ ; $\quad 8^2 = x \cdot (20 - x)$ ; $\quad 64 = 20x - x^2$ ;

$x^2 - 20x + 64 = 0$ ; $\quad \frac{\Delta}{4} = 10^2 - 64 = 36$ ; $\quad x_{1,2} = 10 \mp 6 = \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 16 \end{matrix}$

Pertanto $\overline{AH} = 4\ cm$ e $\overline{HB} = 16\ cm$ .

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ACH$ si ha:

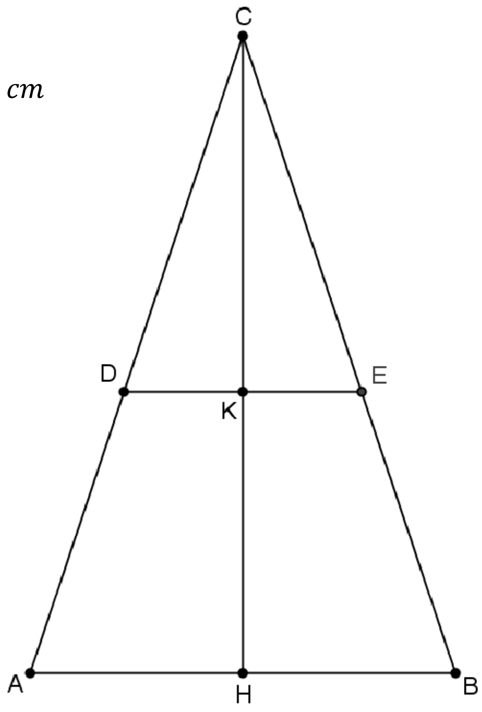
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{AH}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2}\ cm = \sqrt{64 + 16}\ cm = \sqrt{80}\ cm = 4\sqrt{5}\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $BCH$ si ha:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{8^2 + 16^2}\ cm = \sqrt{64 + 256}\ cm = \sqrt{320}\ cm = 8\sqrt{5}\ cm$$

Problema 215.180

Nel triangolo isoscele raffigurato a lato, $\overline{AB} = 10\ cm$, $\overline{AC} = 15\ cm$, $\overline{CD} = 5\ cm$ e $DE \parallel AB$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo CLM.




*Soluzione*

Il perimetro del triangolo $ABC$ misura:

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = (10 + 15 + 15)\ cm = 40\ cm$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo $ACH$ si ha:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{225 - 25}\ cm = \sqrt{200}\ cm = 10\sqrt{2}\ cm$$

L'area de triangolo $ABC$ vale:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = \left(\frac{1}{2}\ 10 \cdot 10\sqrt{2}\right) cm^2 = 50\sqrt{2}\ cm^2.$$

I triangoli $ABC$ e $BCH$ sono simili. Infatti:
$\hat{C}$ è in comune
$C\widehat{D}E \cong \widehat{A}$ perché angoli corrispondenti fra $DE \parallel AB$ tagliate da AC
$C\hat{E}D \cong \hat{B}$ perché angoli corrispondenti fra $DE \parallel AB$ tagliate da $BC$

Ricordando il teorema:

*"Il rapporto fra i perimetri di due triangoli simili è uguale al rapporto fra le misure dei lati corrispondenti"*,

si ottiene:

$$2p_{ABC} : 2p_{CDE} = \overline{AC} : \overline{CD}\ ; \qquad 40 : 2p_{CDE} = 15 : 5 \qquad 2p_{CDE} = \frac{40 \cdot 5}{15}\ cm = \frac{40}{3}\ cm\ .$$

Ricordando il teorema:

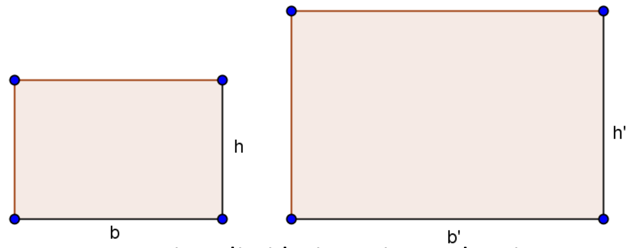
*"Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure dei lati corrispondenti"*, si ha:

$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{AC}^2}\ ; \qquad \frac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \frac{5^2}{15^2}\ ; \qquad \frac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \frac{25}{225}\ ; \qquad \frac{S_{CDE}}{50\sqrt{2}} = \frac{1}{9}\ ;$$

$$S_{CDE} = \frac{50}{9}\sqrt{2}\ cm^2\ .$$

Problema 215.181

Un rettangolo il cui perimetro è 15a è simile a un altro rettangolo la cui base è 8a e la cui altezza è 2a. Calcola la misura dei lati e l'area del primo rettangolo.




*Soluzione*

Il perimetro del rettangolo $R^I$ è

$$p_{R^I} = 2 \cdot (8a + 2a) = 20a$$

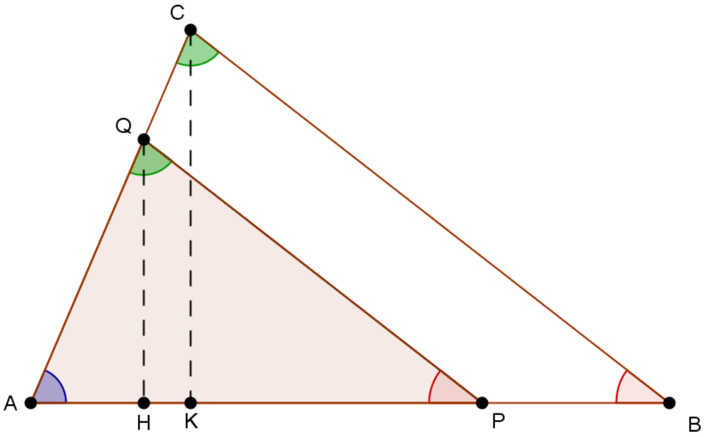
Essendo i due rettangoli $R$ e $R^I$ simili, si ha che i perimetri sono proporzionali ai lati corrispondenti:

$$p_R : p_{R^I} = b : b^I$$

$15a : 20a = b : 8a$ da cui si ottiene: $b = \frac{15a \cdot 8a}{20a} = 6a$ .

L'altezza $h = \frac{15}{2}a - 6a = \frac{3}{2}a$ . L'area del rettangolo $R$ è: $S = b \cdot h = 6a \cdot \frac{3}{2}a = 9a^2$ .

Il lato AB di un triangolo ABC misura a. Conduci da un punto P di AB la parallela PQ a un altro lato in modo che il triangolo risulti suddiviso in due poligoni equivalenti.




*Soluzione 1*

Poniamo $\overline{AP} = x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < a$

I due triangoli $APQ$ e $ABC$ sono simili perché:

- l'angolo $\hat{A}$ è in comune
- $A\hat{Q}P \cong A\hat{C}B$ *(angoli corrispondenti)*
- $A\hat{P}Q \cong A\hat{B}C$ *(angoli corrispondenti)*

Pertanto i due triangoli $APQ$ e $ABC$ hanno i lati proporzionali alle altezze corrispondenti:

$\overline{AP} : \overline{AB} = \overline{QH} : \overline{CK}$ $\quad x : a = \overline{QH} : \overline{CK}$ ; $\quad$ da cui si ottiene: $\overline{QH} = \frac{x}{a}\,\overline{CK}$

| L'equivalenza fra il triangolo $APQ$ e il trapezio $BCQP$ | $\Leftrightarrow$ | l'area del triangolo ABC è il doppio dell'area del triangolo $APQ$ |
|---|---|---|

In simboli: $(APQ \doteq BCQP) \Leftrightarrow (ABC \doteq 2 \cdot APQ) \Leftrightarrow S_{ABC} = 2 \cdot S_{APQ}$

Sostituendo i dati conosciuti si ha:

$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CK}}{2} = 2 \cdot \frac{\overline{AP}\cdot\overline{QH}}{2}$ ; $\quad \overline{AB} \cdot \overline{CK} = 2 \cdot (\overline{AP} \cdot \overline{QH})$ ;

$a \cdot \cancel{\overline{CK}} = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{a}\,\cancel{\overline{CK}}$ ; $\quad$ dividendo per $\overline{CK} \neq 0$ si ottiene:

$a = 2 \cdot \frac{x^2}{a}$ ; $\quad a^2 = 2x^2$ ; $\quad x^2 = \frac{a^2}{2}$ ;

$$x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}a = \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a & \textit{non accettabile} \\ \boxed{x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}a} & \textit{accettabile} \end{cases}$$

*Soluzione 2*

Ricordando il teorema:

*"Il rapporto fra le aree di due triangoli simili è uguale al rapporto fra i quadrati delle misure dei lati corrispondenti"*, si ha:

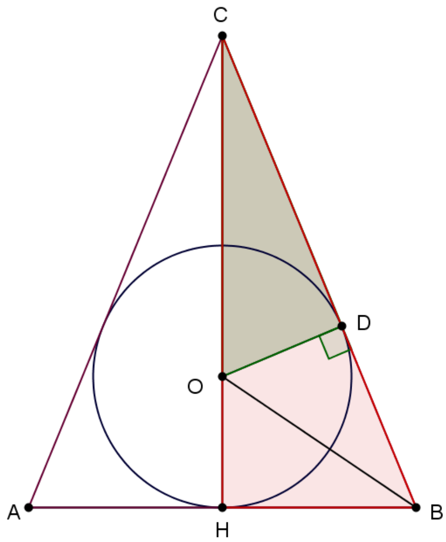
$\overline{AB}^2 : \overline{AP}^2 = S_{ABC} : S_{APQ}$ ; $\quad a^2 : x^2 = 2\,S_{APQ} : S_{APQ}$ ;

$x^2 = \frac{a^2 \cdot S_{APQ}}{2S_{APQ}}$ ; $\quad x^2 = \frac{1}{2}a^2$ ;

$$x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}a = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}a = \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}a & \textit{non accettabile} \\ \boxed{x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}a} & \textit{accettabile} \end{cases}$$

Problema 215.191

Considera una circonferenza avente il raggio di $3\ cm$ e circoscrivi a essa un triangolo isoscele $ABC$ sulla base $AB$. Il rapporto tra l'altezza $CH$ e la base è $\frac{6}{5}$. Determina le lunghezze dei lati del triangolo.




*Soluzione*

Poniamo $\overline{HB} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} = 2x$

$\overline{CH} = \frac{6}{5} 2x = \frac{12}{5} x$

$\overline{CO} = \frac{12}{5} x - 3$

$\overline{BC} = \sqrt{\frac{144}{25} x^2 + x^2} = \sqrt{\frac{169}{25} x^2} = \frac{13}{5} x$ .

Dalla similitudine dei triangoli $COD$ e $CBH$ si ottiene:

$\overline{CO} : \overline{CB} = \overline{OD} : \overline{HB}$ ; $\qquad \left(\frac{12}{5} x - 3\right) : \frac{13}{5} x = 3 : x$

$\frac{39}{5} x = x \cdot \left(\frac{12}{5} x - 3\right)$ ; $\qquad \frac{39}{5} x = \frac{12}{5} x^2 - 3x$ ; $\qquad 12x^2 - 54x = 0$ ;

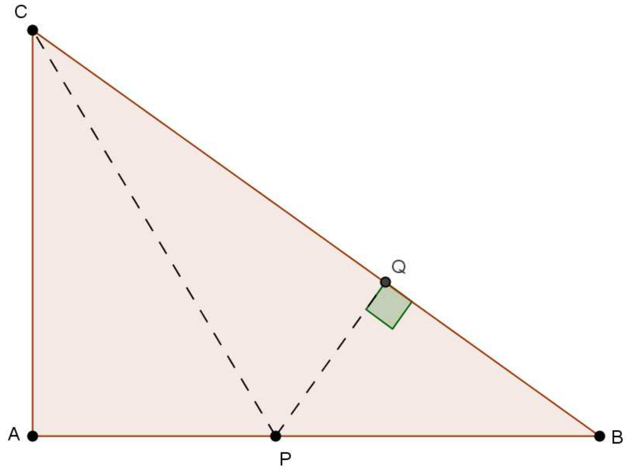
$2x^2 - 9x = 0$ ; $\quad \begin{matrix} x = 0 \\ x = \frac{9}{2} \end{matrix}$

Pertanto:

$\overline{AB} = 2 \cdot \frac{9}{2} = 9\ cm$

$\overline{BC} = \frac{13}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{117}{10} = 11{,}7\ cm$ .

É dato un triangolo rettangolo $ABC$ il cui cateto $AB$ è 12 $cm$. Si sa, inoltre, che il cateto $AC$ è $\frac{3}{4}$ di $AB$. Determina su $AB$ un punto $P$ in modo tale che, detta $Q$ la sua proiezione ortogonale su $BC$, sussista la relazione: $\overline{PC}^2 + 2\overline{PQ}^2 = 40\overline{AP}^2 - 3$ .




*Soluzione*

Calcoliamo innanzitutto le misure degli altri due lati:

$$\overline{AC} = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9\ cm$$

$$\overline{BC} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15\ cm$$

Indicando: $\overline{AP} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = 12 - x$ con i vincoli geometrici $0 < x < 12$ .

Dalla similitudine dei due triangoli $ABC$ e $PBQ$ (l'angolo $\hat{B}$ in comune e $\hat{A} = P\hat{Q}B = 90°$) si ottiene:

$$\overline{PQ} : \overline{AC} = \overline{PB} : \overline{CB} ; \qquad \overline{PQ} : 9 = (12 - x) : 15 ; \qquad \overline{PQ} = \frac{9 \cdot (12 - x)}{15} = \frac{3}{5}(12 - x) .$$

Mentre

$$\overline{QB} : \overline{AB} = \overline{PB} : \overline{CB} ; \qquad \overline{QB} : 12 = (12 - x) : 15 ; \qquad \overline{QB} = \frac{12 \cdot (12 - x)}{15} = \frac{4}{5}(12 - x) .$$

Pertanto:

$$\overline{CQ} = \overline{BC} - \overline{QB} = 15 - \frac{4}{5}(12 - x) = \frac{75 - 48 + 4x}{5} = \frac{27 + 4x}{5}$$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo CPQ si ricava:

$$\overline{PC}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{CQ}^2 = \left[\frac{3}{5}(12 - x)\right]^2 + \left(\frac{27 + 4x}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}(144 + x^2 - 24x) + \frac{729 + 16x^2 + 216x}{25} =$$

$$= \frac{1296 + 9x^2 - 216x + 729 + 16x^2 + 216x}{25} = \frac{2025 + 25x^2}{25} = 81 + x^2 .$$

Sostituendo le espressioni trovate nella relazione: $\overline{PC}^2 + 2\overline{PQ}^2 = 40\overline{AP}^2 - 3$ si ottiene:

$$81 + x^2 + 2 \cdot \frac{9}{25}(144 + x^2 - 24x) = 40x^2 - 3 ;$$

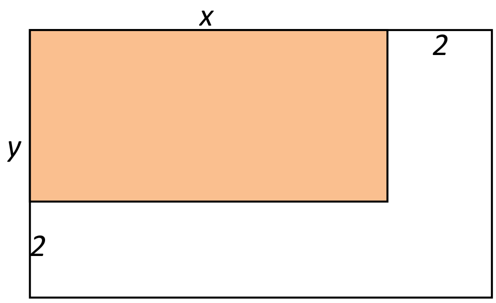
Da cui si ricavano le radici: $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{782}{319}$.

Di queste radici soltanto quella positiva è accettabile.

Pertanto il punto P si trova a 2 $cm$ dal vertice $A$.

Problema 215.193

Un rettangolo ha la superficie di $80\ cm^2$. Se si aumentano le sue dimensioni ciascuna di $2\ cm$, l'area aumenta di $46\ cm^2$. Calcola la misura delle dimensioni.




*Soluzione*

Ponendo le dimensioni del rettangolo uguali a $x$ e $y$.

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 80 \\ (x+2)(y+2) = 80+46 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ xy + 2x + 2y + 4 = 126 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ xy + 2x + 2y = 122 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ x \cdot \dfrac{80}{x} + 2x + 2 \cdot \dfrac{80}{x} = 122 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ 80 + 2x + \dfrac{160}{x} - 122 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ 80x + 2x^2 + 160 - 122x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ 2x^2 - 42x + 160 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{80}{x} \\ x^2 - 21x + 80 = 0 \end{cases}$$

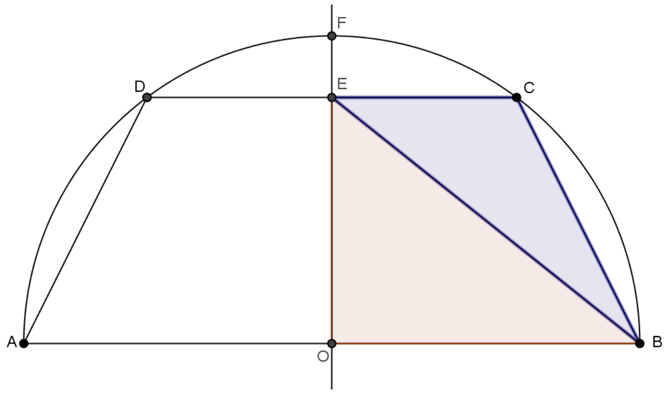
Da cui si ricava:

$$x_{1,2} = \frac{21 \mp \sqrt{441-320}}{2} = \frac{21 \mp 11}{2} = \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 16 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 16 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Le dimensioni del rettangolo sono pertanto: $b = 16\ cm$ e $h = 5\ cm$.

Problema 215.194

Stabilisci se si può inscrivere un trapezio isoscele che ha il perimetro di $20\ cm$ in una semicirconferenza di raggio $5\ cm$.




*Soluzione*

La base del trapezio deve coincidere con il diametro. Pertanto $\overline{AB} = 10\ cm$.

Quindi: $\overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DC}} + \overline{\mathrm{CD}} = 10\ cm$ .

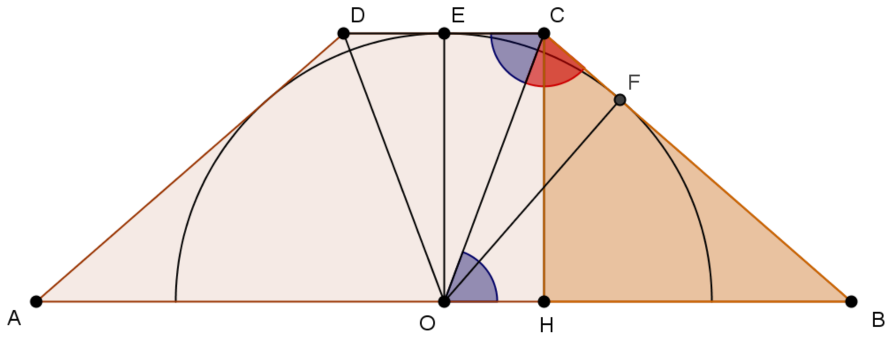
Cioè: $\overline{\mathrm{EC}} + \overline{\mathrm{CB}} = 5\ cm$ . Ma ciò non può sussistere.

Infatti, ricordando che:

- la somma di due qualsiasi lati di un triangolo è maggiore del terzo
- in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno cateto

si ha che: $\overline{\mathrm{EC}} + \overline{\mathrm{CB}} > \overline{\mathrm{EB}} > \overline{\mathrm{OB}} = 5$ .

Un trapezio isoscele è circoscritto a un semicerchio di raggio $r$. Sapendo che la base minore è parallela al diametro ed è lunga $\frac{3}{4}r$, determina il perimetro e l'area del trapezio.




*Soluzione*

Essendo $\overline{DC} = \frac{3}{4}r \quad \Rightarrow \quad \overline{EC} = \frac{3}{8}r$ e $\overline{OH} = \frac{3}{8}r$

$B\hat{O}C \cong O\hat{C}E$ perché alterni interni

$O\hat{C}E \cong O\hat{C}F$ perché CE e CF sono tangenti alla circonferenza. $\quad \Rightarrow \quad B\hat{O}C \cong O\hat{C}F$

Il che dimostra che il triangolo OBC è isoscele con $OB \cong BC$ .

Poniamo $\overline{OB} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} = x - \frac{3}{8}r$

Con i limiti geometrici: $x > r$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo BCH si ha:

$\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{BC}^2$ ;

$r^2 + \left(x - \dfrac{3}{8}r\right)^2 = x^2$ ; $\qquad r^2 + x^2 + \dfrac{9}{64}r^2 - \dfrac{3}{4}rx = x^2$ ; $\qquad \dfrac{73}{64}r^2 - \dfrac{3}{4}rx = 0$ ;

$\dfrac{3}{4}rx = \dfrac{73}{64}r^2$ ; $\qquad x = \dfrac{73}{64}r^2 \cdot \dfrac{4}{3r}$ ; $\qquad x = \dfrac{73}{48}r$

Pertanto $\overline{BC} = \frac{73}{48}r$ e $\overline{AB} = 2 \cdot \frac{73}{48}r = \frac{73}{24}r$

In definitiva il perimetro del trapezio è:

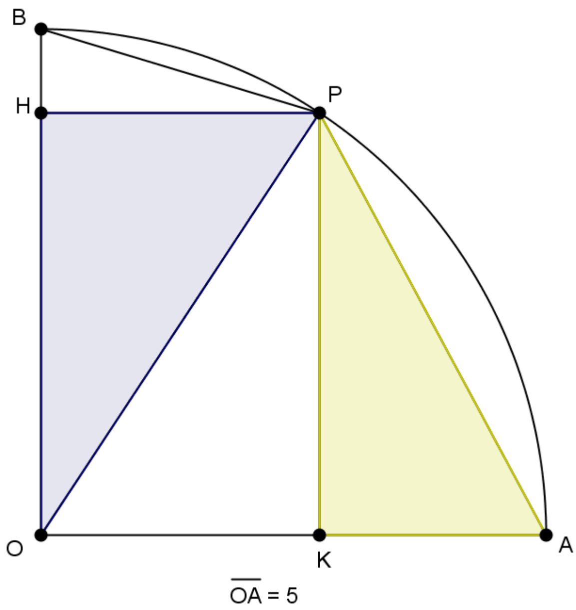
$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = \frac{73}{24}r + \frac{73}{48}r + \frac{3}{4}r + \frac{73}{48}r = \frac{328}{48}r = \frac{41}{6}r$ .

Mentre l'area è:

$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{CH} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{73}{24}r + \frac{3}{4}r\right) \cdot r = \frac{91}{48}r^2$ .

## Problema 215.196

Disegna un arco AB, quarta parte di una circonferenza di centro $O$ il cui raggio $5\ cm$. Fissa su AB un punto $P$ e indica con $H$ la sua proiezione sul lato $OB$. Determina la misura di PH in modo che: $\overline{AP} + 2\overline{PH} = 11$ .




*Soluzione*

Poniamo $\overline{PH} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PA} = 11 - 2x \quad$ e $\quad \overline{KA} = 5 - x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < 5$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo OPH si ha:

$\overline{OH} = \sqrt{25 - x^2}$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo PAK si ha:

$\overline{KA}^2 + \overline{PK}^2 = \overline{PA}^2$ ;

$(5 - x)^2 + \left(\sqrt{25 - x^2}\right)^2 = (11 - 2x)^2$ ;

$25 + x^2 - 10x + 25 - x^2 = 121 + 4x^2 - 44x$ ;

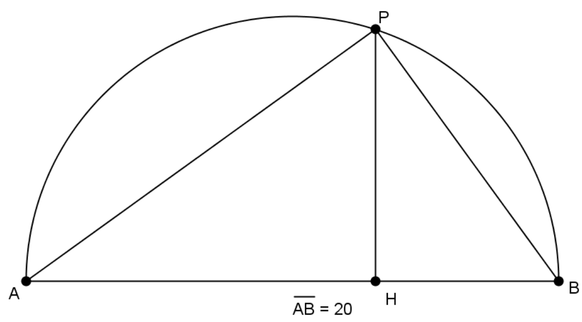
$4x^2 - 34x + 71 = 0$ ;

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{17 \mp \sqrt{289 - 284}}{4} = \frac{17 \mp \sqrt{5}}{4}.$$

Soluzioni entrambe accettabili, perché rispettano i limiti geometrici.

## Problema 215.198

Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 20\ cm$, individua un punto P in modo tale che $2\overline{AP} = 3\overline{PB}$ .




*Soluzione*

Poniamo $\overline{AP} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} = \frac{3}{2}x$

Con i limiti geometrici: $0 < x < 20$

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo ABP si ha:

$\overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{AB}^2$

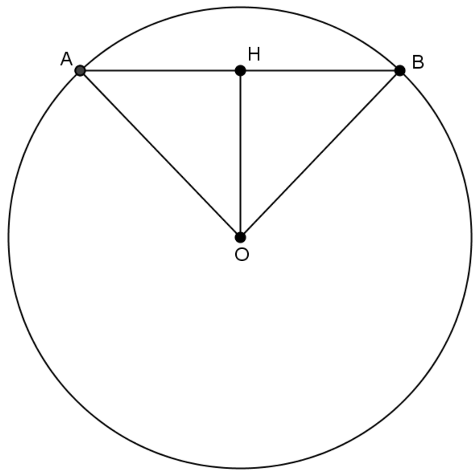
$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 400$ ; $\qquad 4x^2 + 9x^2 = 1600$ ; $\qquad 13x^2 = 1600$ ; $\qquad x^2 = \frac{1600}{13}$ ; $\qquad x = \mp\frac{40}{13}\sqrt{13}$

Soltanto la soluzione positiva è accettabile. Pertanto $\overline{AP} = \frac{40}{13}\sqrt{13}\ cm$ .

Applicando il I° T. di Euclide al triangolo rettangolo ABP si ha: $\overline{AP}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB}$

Da cui si ottiene: $\overline{AH} = \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AB}} = \frac{1600}{13} \cdot \frac{1}{20} = \frac{80}{13}$ .

Il raggio di una circonferenza di centro $O$ è $10\,cm$. Conduci una corda $AB$ e indica con $H$ il piede della perpendicolare condotta da $O$ ad $AB$. Trova a quale distanza dal centro $O$ si deve tracciare la corda affinché sussista la relazione $\overline{AB} + \overline{OH} = 22\ cm$ .




*Soluzione*

Poniamo $\overline{OH} = x$ con i limiti geometrici: $0 < x < 10$.

$\overline{AH} = \sqrt{100 - x^2}$ $\Longrightarrow$ $\overline{AB} = 2\sqrt{100 - x^2}$

Sostituendo nella relazione $\overline{AB} + \overline{OH} = 22\ cm$ si ottiene:

$2\sqrt{100 - x^2} + x = 22$ ; $2\sqrt{100 - x^2} = 22 - x$

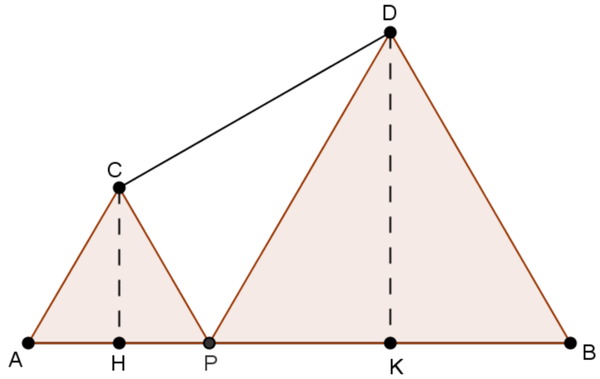
$4(100 - x^2) = 484 + x^2 - 44x$ ;

$400 - 4x^2 - 484 - x^2 + 44x = 0$ ;

$5x^2 - 44x + 84 = 0$ ;

$$x_{1,2} = \frac{22 \mp \sqrt{484 - 420}}{a} = \frac{22 \mp \sqrt{64}}{5} = \frac{22 \mp 8}{5} = \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{14}{5} \\ x_2 = 6 \end{array}$$

Considera un segmento $AB$ lungo $9\,cm$. Tra gli estremi $A$ e $B$ prendi un punto $P$ e costruisci, dalla stessa parte, i due triangoli equilateri $APC$ e $PBD$. Calcola quale distanza deve avere $P$ da $A$ affinché risulti: $S_{CPD} = \frac{1}{2} S_{PBD}$ .




*Soluzione*

Poniamo $\overline{AP} = x$ con i limiti geometrici: $0 < x < 9$ .

$\overline{PB} = 9 - x$ $\quad$ $\overline{PH} = \dfrac{x}{2}$ $\quad$ $\overline{PK} = \dfrac{9-x}{2}$

$\overline{CH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ $\quad$ $\overline{DK} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(9-x)$

Sostituendo nella relazione: $S_{CPD} = \frac{1}{2} S_{PBD}$ si ottiene:

$$S_{CDKH} - S_{PCH} - S_{PDK} = \frac{1}{2} S_{PBD}$$

$$\frac{1}{2}(\overline{DK} + \overline{CH}) \cdot \overline{HK} - \frac{1}{2}\overline{PH} \cdot \overline{CH} - \frac{1}{2}\overline{PK} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{DK} \,;$$

$$(\overline{DK} + \overline{CH}) \cdot \overline{HK} - \overline{PH} \cdot \overline{CH} - \overline{PK} \cdot \overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{PB} \cdot \overline{DK} \,;$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(9-x) + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{9-x}{2}\right) - \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{9-x}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(9-x) = \frac{1}{2}(9-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(9-x) \,;$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(9-x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(9-x)^2 \,;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(9-x)^2 = 0 \,;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}(81 + x^2 - 18x) = 0 \,;$$

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{81\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 9\sqrt{3}x = 0 \,;$$

$$81\sqrt{3} - \sqrt{3}x^2 - 162\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x^2 + 36\sqrt{3}x = 0 \,;$$

$$-3\sqrt{3}x^2 + 36\sqrt{3}x - 81\sqrt{3} = 0 \,;$$

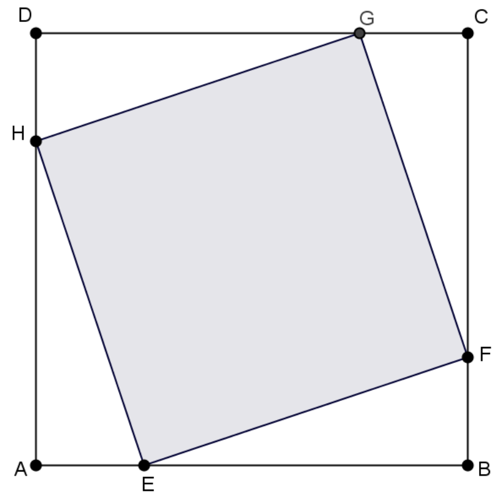
$$x^2 - 12x + 27 = 0 \,;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{6 \mp \sqrt{36-27}}{1} = 6 \mp 3 = \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 9 \end{matrix}$$

Soltanto la soluzione positiva: $x = 3$ è accettabile.

Pertanto $\overline{AP} = 3$ .

Un quadrato $ABCD$ ha l'area di $75a^2$. Inscrivi in esso un altro quadrato $EFGH$ la cui area sia $39a^2$ . Calcola le lunghezze di $AE$ e di $EB$.




*Soluzione*

$S_{ABCD} = 75a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{AB} = 5\sqrt{3}a$

$S_{EFGH} = 39a^2 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{EF} = \sqrt{39}a$

Poniamo $\overline{AE} = x \qquad \Rightarrow \qquad \overline{EB} = 5\sqrt{3}a - x$

con i limiti geometrici: $0 < x < 5\sqrt{3}a$ .

Applicando il T. di Pitagora al triangolo rettangolo EBF si ha:

$\overline{EB}^2 + \overline{BF}^2 = \overline{EF}^2$

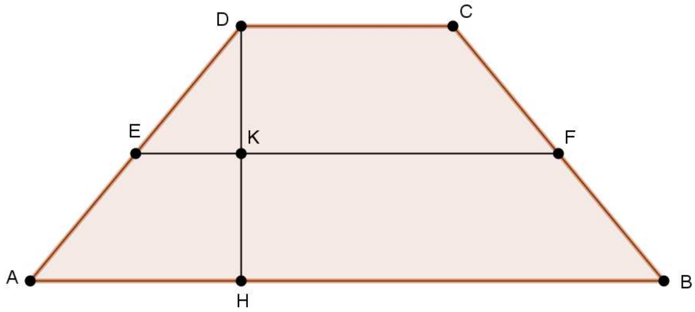
$\left(5\sqrt{3}a - x\right)^2 + x^2 = \left(\sqrt{39}a\right)^2$ ; $\qquad 75a^2 + x^2 - 10\sqrt{3}ax + x^2 = 39a^2$ ;

$2x^2 - 10\sqrt{3}ax + 36a^2 = 0$ ; $\qquad x^2 - 5\sqrt{3}ax + 18a^2 = 0$ ;

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5\sqrt{3}a \mp \sqrt{75a^2 - 72a^2}}{2} = \frac{5\sqrt{3}a \mp \sqrt{3}a}{2} = \begin{matrix} x_1 = 2\sqrt{3}a \\ x_2 = 3\sqrt{3}a \end{matrix}$$

Soluzioni entrambe accettabili.

Un trapezio isoscele che ha la base maggiore di $28\,cm$, la minore di $10\,cm$ e l'altezza di $12\,cm$, si deve suddividere, mediante una parallela alle basi, in due trapezi aventi l'area uguale. Trova a quale distanza dalla base minore si deve tracciare la parallela.




_Soluzione_

$S_{ABCD} = \frac{10+28}{2} \cdot 16 = 228\,cm^2 \;\;\Rightarrow\;\; S_{DCEF} = 114\,cm^2$

Poniamo $\overline{DK} = x$

con i limiti geometrici: $0 < x < 12$ .

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{DC}}{2} = 9\,cm$$

Dalla similitudine dei triangoli ADH e DEK si ha: $\overline{EK} : \overline{AH} = \overline{DK} : \overline{DH}$ ; $\overline{EK} : 9 = x : 12$

Da cui si ricava: $\overline{EK} = \frac{3}{4}x$ .

Sostituendo nella relazione: $S_{DCEF} = 114\,cm^2$ si ottiene:

$$\frac{\overline{EF} + \overline{DC}}{2} \cdot \overline{DK} = 114 \;; \qquad (\overline{EF} + \overline{DC}) \cdot \overline{DK} = 228 \;; \qquad \left(10 + \frac{3}{2}x + 10\right) \cdot x = 228 \;;$$

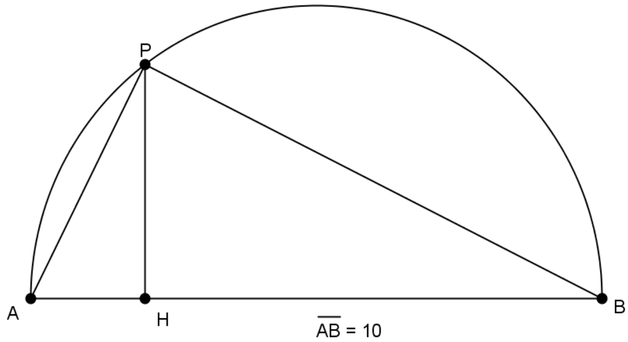
$$20x + \frac{3}{2}x^2 = 228 \;; \qquad 3x^2 + 40x - 456 = 0 \;;$$

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 + 1368}}{3} = \frac{-20 \pm \sqrt{1768}}{3} = \frac{-20 \pm 2\sqrt{442}}{3} .$$

Scartando la soluzione negativa, si ha:

$$\overline{DK} = \frac{-20 + 2\sqrt{442}}{3}\;cm$$

Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 10\ cm$, trova un punto $P$ in modo tale che, detta $H$ la sua proiezione su $AB$, sia $\overline{AH} + \overline{PB} = 12\ cm$ .




*Soluzione*

Poniamo $\overline{AH} = x$ e $\overline{PB} = y$

con i limiti geometrici: $0 < x < 10$ e $0 < y < 10$

Per il I° T. di Euclide applicato al triangolo rettangolo $ABP$ si ha:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ y^2 = 10 \cdot (10 - x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 12 - x \\ (12 - x)^2 = 100 - 10x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 12 - x \\ 144 + x^2 - 24x - 100 + 10x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 12 - x \\ x^2 - 14x + 44 = 0 \end{cases}$$

Da cui si ricava:

$$x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 44}}{1} = 7 \pm \sqrt{5}$$

Le soluzioni sono entrambe accettabili perché entrambe positive e minori di 10.