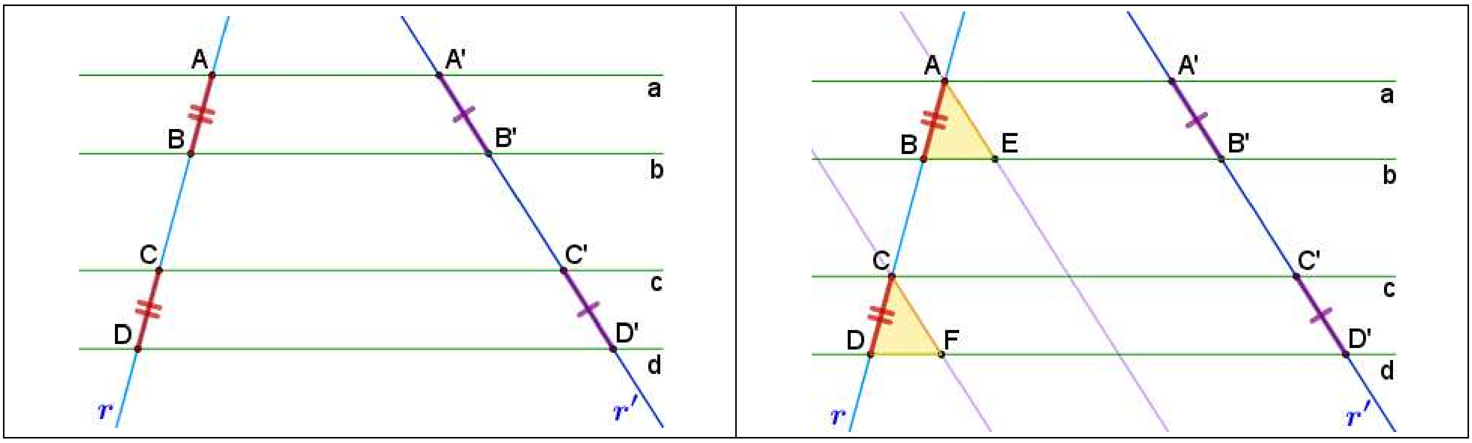
TEOREMA DI TALETE

Piccolo Teorema di Talete

Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale.

IPOTESI		*TESI*
$a \parallel b \parallel c \parallel d$ $AB \cong CD$	$\Rightarrow$	$A'B' \cong C'D'$



<u>*Dimostrazione*</u>

Conduciamo da A *la parallela ad* r' *e indichiamo con* E *il suo punto d'intersezione con* b.

Conduciamo da C *la parallela ad* r' *e indichiamo con* F *il suo punto d'intersezione con* d.

I due triangoli ABE *e* CDF *sono congruenti per il II criterio di congruenza dei triangoli.*
Infatti hanno:

$AB \cong CD$	*per ipotesi;*
$A\hat{B}E \cong C\hat{D}F$	*perché angoli corrispondenti fra le rette parallele b e d tagliate dalla trasversale AD;*
$B\hat{A}E \cong D\hat{C}F$	*perché angoli corrispondenti fra le rette parallele AE e CF tagliate dalla trasversale AD.*

Pertanto $AE \cong CF$.

Ma $AEB'A'$ *e* $CFD'C'$ *sono due parallelogrammi (hanno i lati opposti paralleli).*

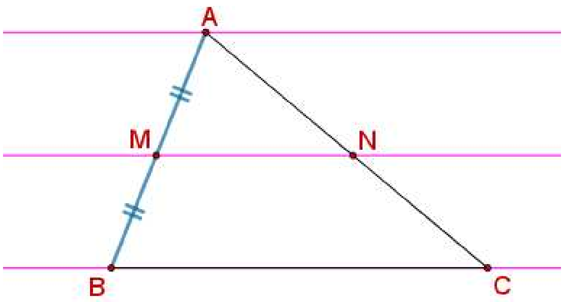
Di conseguenza: $A'B' \cong AE$ *e* $CF \cong C'D'$.

Avendo dimostrato che: $AE \cong CF$, *per la proprietà transitiva si ha:* $A'B' \cong C'D'$.

Corollario del Piccolo Teorema di Talete

La parallela tracciata dal punto medio di un lato di un triangolo a uno degli altri due lati incontra il terzo lato nel suo punto medio.

IPOTESI		*TESI*
$MN \parallel BC$ $AM \cong MB$	$\Rightarrow$	$AN \cong NC$



Dimostrazione

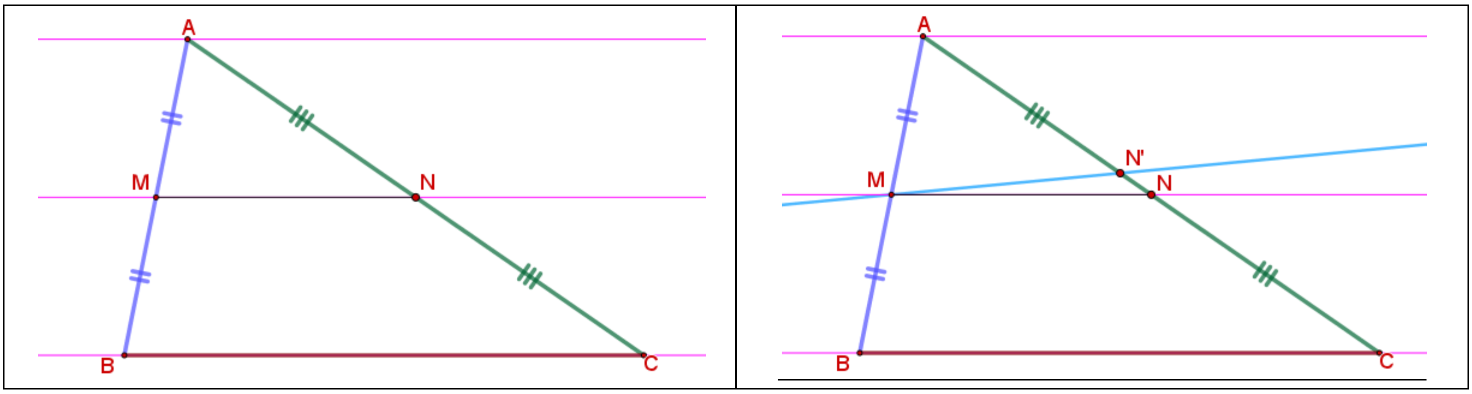
Conduciamo le tre rette parallele alla base BC: passanti per il vertice A, per i punti medi M ed N e per la base BC.

Per il piccolo teorema di Talete, dall'ipotesi $AM \cong MB$ *si ha la tesi* $AN \cong NC$.

Teorema dei punti medi

Il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.

	IPOTESI		*TESI*
	$AM \cong MB$ $AN \cong NC$	$\Rightarrow$	$MN \parallel BC$ $MN \cong \frac{1}{2} BC$



Dimostrazione $MN \parallel BC$

Supponiamo per assurdo che la retta MN non sia parallela alla retta BC.

Quindi dovrebbe esistere un'altra retta passante per M parallela a BC che incontra la retta AC in un punto $N' \neq N$.

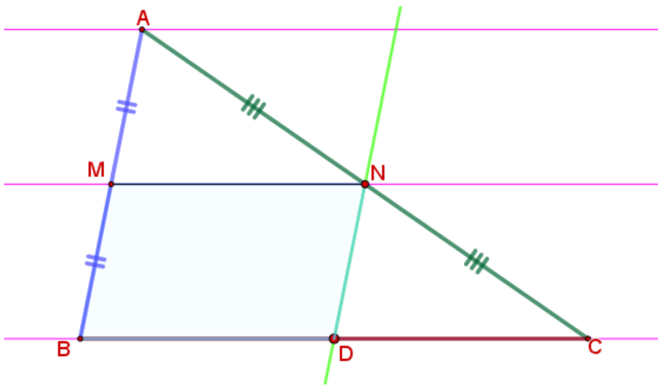
Essendo per ipotesi $AM \cong MB$, *per il Corollario del Piccolo Teorema di Talete, si ha che:* $AN' \cong N'C$.

Essendo per ipotesi $AN \cong NC$ *, per l'unicità del punto medio, si ha che:* $N' \equiv N$.

Ma ciò contraddice la nostra ipotesi di partenza $N' \neq N$.

Si conclude pertanto che la retta MN deve essere parallela alla retta BC.

Dimostrazione $MN \cong \frac{1}{2} BC$



Conduciamo da M *la parallela al lato* BC.

Per il Corollario del Piccolo Teorema di Talete questa parallela incontra il lato AC *nel suo punto medio* N.

Conduciamo da N *la parallela al lato* AB.

Per il Corollario del Piccolo Teorema di Talete questa parallela incontra il lato BC *nel suo punto medio* D.

Si ottiene quindi che: $BD \cong \frac{1}{2} BC$.

Il quadrilatero $MNDB$, *avendo i lati opposti paralleli, è un parallelogramma. Quindi* $MN \cong BD$.

Per la proprietà transitiva si ha: $MN \cong \frac{1}{2} BC$.

Grandezze commensurabili e incommensurabili

Due grandezze omogenee sono **commensurabili** se esiste una grandezza, omogenea con le due date, che sia loro sottomultiplo comune. In altro modo si potrebbe dire: Due grandezze omogenee A e B sono **commensurabili** se e solo se esiste un numero razionale $\frac{p}{q}$ tale che $A = \frac{p}{q}B$

Due grandezze omogenee sono **incommensurabili** se non esiste una grandezza, omogenea con le due date, che sia loro sottomultiplo comune.

Misura di una grandezza commensurabile

Date due grandezze A e U, fra loro commensurabili, si definisce **misura** della grandezza A rispetto alla grandezza U, il numero razionale $\frac{p}{q}$ tale che: $A = \frac{p}{q}U$. La misura della grandezza A è indicata con $\overline{}$.

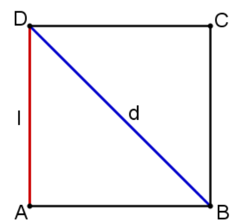
La grandezza U è detta **unità di misura**.L'unità di misura della lunghezza è il **metro**.

Misura di una grandezza incommensurabile

È possibile estendere il concetto di misura anche a grandezze incommensurabili, purché si utilizzino i numeri reali anziché i numeri razionali.La misura di una grandezza A incommensurabile rispetto ad una grandezza U è un numero irrazionale.

Teorema

La diagonale di un quadrato e il suo lato sono segmenti incommensurabili.



Dimostrazione

Applicando il T. di Pitagora si ha:

$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2}\,l$ ma $\sqrt{2}$ non è un numero razionale $(*)$.

(*) La dimostrazione che $\sqrt{2}$non è un numero razionale è svolta nella dispensa sui radicali.

Piccolo Teorema di Talete

Il piccolo teorema di Talete visto precedentemente può essere così riformulato:

Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, se due segmenti $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{CD}$ su una trasversale hanno rapporto $\mathbf{1}$ *(che equivale a dire che sono congruenti)*, **anche i segmenti $\mathbf{A'B'}$ e $\mathbf{C'D'}$ sulla seconda trasversale hanno rapporto uguale a $\mathbf{1}$**.

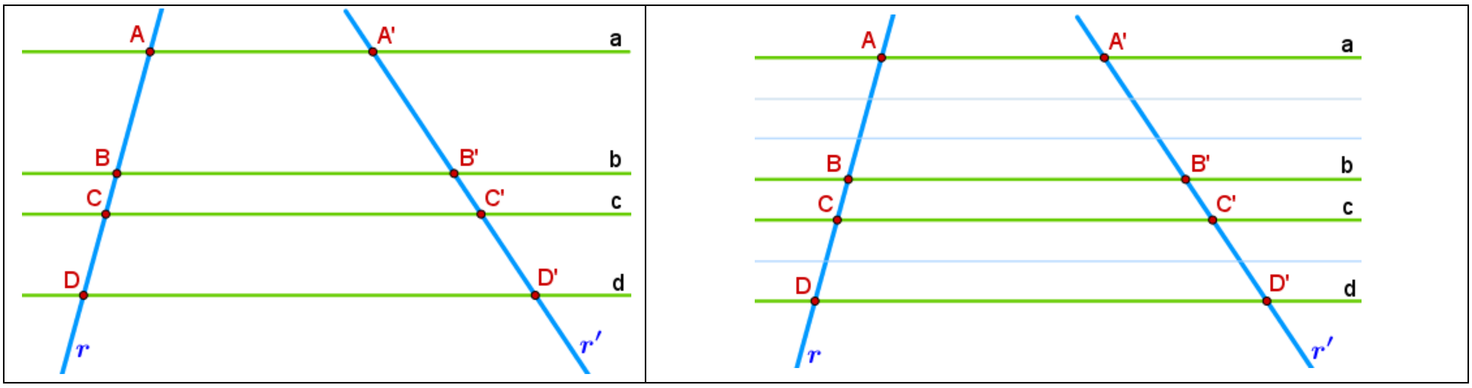
In particolare: $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \dfrac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{C'D'}}$.

Ora generalizziamo questo risultato, dimostrando che l'uguaglianza tra questi rapporti sussiste anche se i segmenti AB e CD non sono tra loro congruenti.

Grande Teorema di Talete

Dato un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, il rapporto tra due segmenti AB e CD individuati dal fascio su una trasversale è uguale al rapporto tra i loro corrispondenti A’B’ e C’D’ sull’altra trasversale.

IPOTESI		*TESI*
$a \parallel b \parallel c \parallel d$ $A'B'$ *è il corrispondente di* AB $C'D'$ *è il corrispondente di* CD	$\Rightarrow$	$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$



<u>Dimostrazione</u>

Per semplificare, consideriamo il caso in cui i segmenti AB e CD siano commensurabili.
(il teorema può essere estesa anche al caso in cui i segmenti AB e CD siano incommensurabili)

Sia pertanto: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{p}{q}$ *con p e q numeri naturali.*

Ciò significa che esiste un segmentino u sottomultiplo comune di AB e CD tale che $AB \cong p \cdot u$ *e* $CD \cong q \cdot u$.

Consideriamo:

- *I punti che dividono il segmento AB in p segmentini congruenti ad u (nel nostro grafico $p = 3$);*
- *I punti che dividono il segmento CD in q segmentini congruenti ad u (nel nostro grafico $q = 2$).*

Tracciamo da tali punti le rette parallele alle altre rette del fascio.

I punti di intersezione di tali rette con la trasversale r' suddividono $A'B'$ e $C'D'$, rispettivamente, in p segmentini e in q segmentini. Questi segmentini, per il piccolo Teorema di Talete, sono tutti congruenti ad u'.

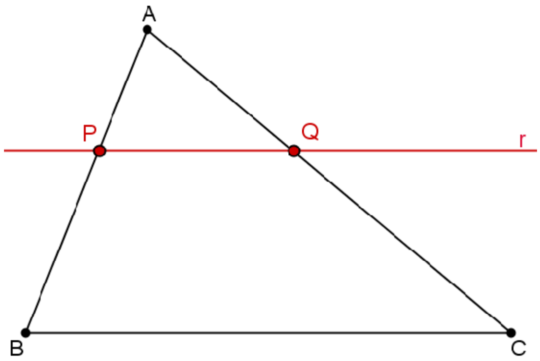
Si ha allora:

$$A'B' \cong pu' \quad e \quad C'D' \cong qu' \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{pu'}{qu'} = \frac{p}{q} \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

Retta parallela ad un lato del triangolo

Se una retta parallela a un lato di un triangolo interseca gli altri due lati, li divide in segmenti proporzionali.

IPOTESI		*TESI*
$r \parallel BC$ $r \cap AB = \{P\}$ $r \cap AC = \{Q\}$	$\Rightarrow$	$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$



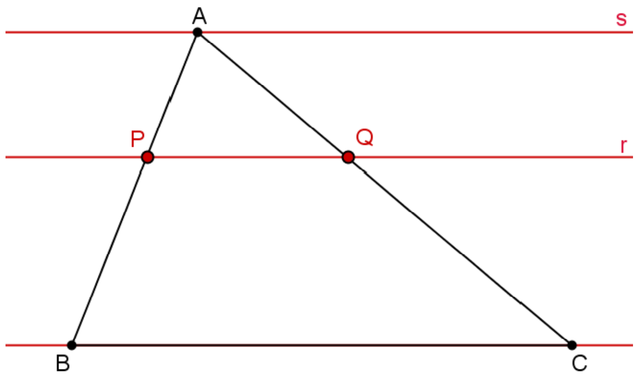
<u>*Dimostrazione*</u>

Tracciamo la retta s, passante per A e parallela al lato BC.

Otteniamo così tre rette parallele r, s e BC tagliate dalle trasversali AB ed AC.

Pertanto, per il teorema di Talete, risulta:

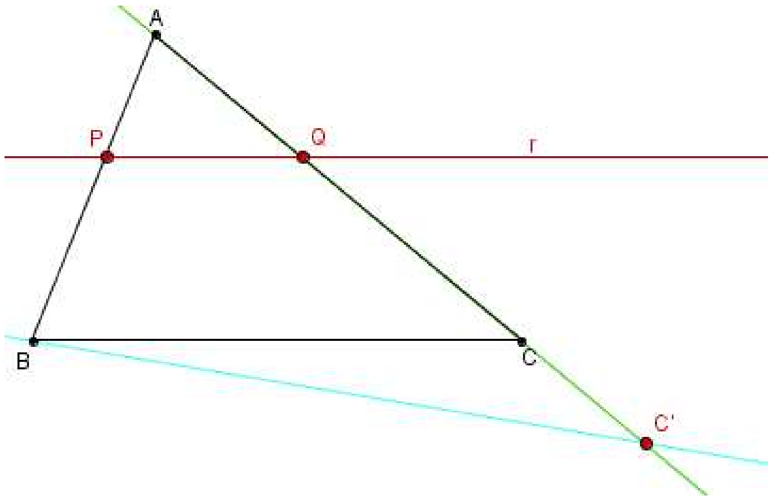
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$$



Teorema inverso - Retta parallela ad un lato del triangolo

Se una retta interseca due lati di un triangolo in segmenti proporzionali sui due lati, allora la retta è parallela al terzo lato.

IPOTESI		TESI
$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$ $r \cap AB = \{P\}$ $r \cap AC = \{Q\}$	$\Rightarrow$	$PQ \parallel BC$



<u>*Dimostrazione per assurdo*</u>

Supponiamo per assurdo che la retta PQ non sia parallela alla retta BC.

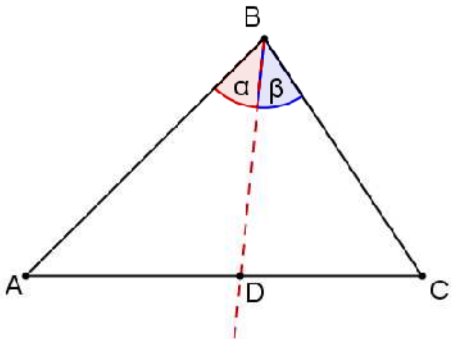
Pertanto dovrà esistere un'altra retta passante per B parallela a PQ . Indichiamo con C' il suo punto d'intersezione con la retta AC.

Per il teorema precedente sarà valida la seguente proporzione: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC'}}$.

Confrontando tale relazione con quella della ipotesi: $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$ *si ricava che:* $\overline{QC} \cong \overline{QC'}$.

Ciò vuol dire che la retta $BC \equiv BC'$ *e quindi la retta BC risulterebbe parallela alla retta PQ , contro quanto supposto.*

Teorema della bisettrice



In un triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in segmenti proporzionali agli altri due lati.

IPOTESI		*TESI*
$A\hat{B}D \cong D\hat{B}C$	$\Rightarrow$	$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$

<u>*Dimostrazione*</u>

Tracciamo da C la retta parallela alla bisettrice BD e indichiamo con E il suo punto d'intersezione con il prolungamento del lato AB.

$\gamma \cong \alpha$ *perché angoli corrispondenti rispetto alle rette parallele BD e CE tagliate dalla trasversale AE.*

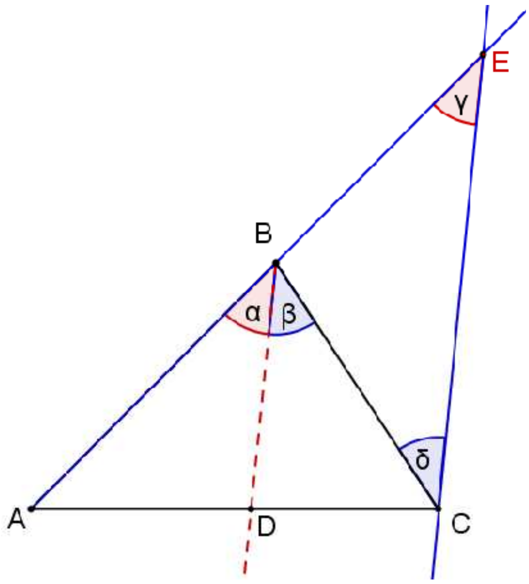
$\alpha \cong \beta$ *per ipotesi.*

$\beta \cong \delta$ *perché angoli alterni interni rispetto alle rette parallele BD e CE tagliate dalla trasversale BC.*

Per la proprietà transitiva si ottiene: $\gamma \cong \delta$.

Ciò equivale a dire che il triangolo BEC è isoscele sulla base CE, ossia $BC \cong BE$.

Applicando il "Teorema della retta parallela ad un lato del triangolo", (ACE) si ha che:	$\dfrac{\overline{\boldsymbol{AD}}}{\overline{\boldsymbol{DC}}} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{BE}}}$
Dalla dimostrazione precedente abbiamo:	$\boldsymbol{BC \cong BE}$
Sostituendo nella precedente uguaglianza si ottiene la tesi.	$\dfrac{\overline{\boldsymbol{AD}}}{\overline{\boldsymbol{DC}}} = \dfrac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{BC}}}$

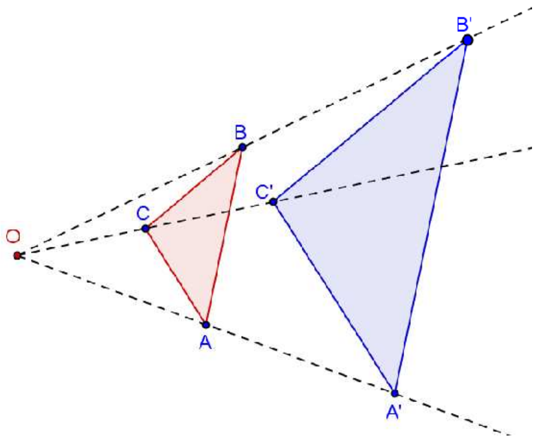


LA SIMILITUDINE

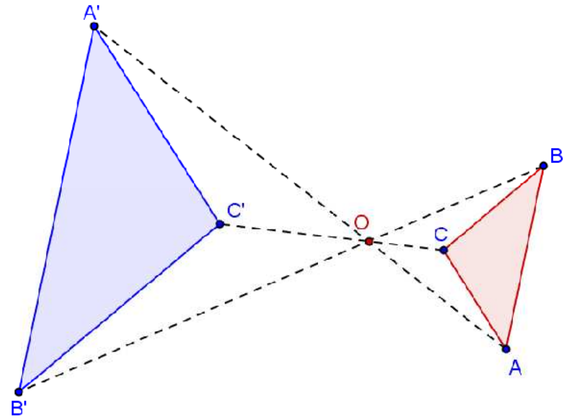
Omotetie

Una **omotetia** di centro O e rapporto k $(k \in R)$, è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano che lascia fisso il punto O e trasforma ogni altro punto P del piano, diverso da O, nel punto P' tale che:

- Se $k > 0P'$ appartiene alla semiretta OP
- Se $k < 0P'$ appartiene alla semiretta opposta ad OP
- $OP' \cong |k|OP$



$k > 0$



$k < 0$

Proprietà

Una omotetia trasforma:

- Una retta in un'altra retta a essa parallela
- Un segmento in un segmento parallelo al primo e tale che il rapporto è uguale al valore assoluto del rapporto di omotetia
- Un angolo in un angolo a esso congruente.

Similitudine

Una **similitudine** è una trasformazione ottenuta dalla composizione di una omotetia e di una isometria, o viceversa.

Due figure si dicono **simili** se si corrispondono in una similitudine.

Per indicare che il poligono F è simile al poligono F' si utilizza la seguente scrittura $\boldsymbol{F \approx F'}$.

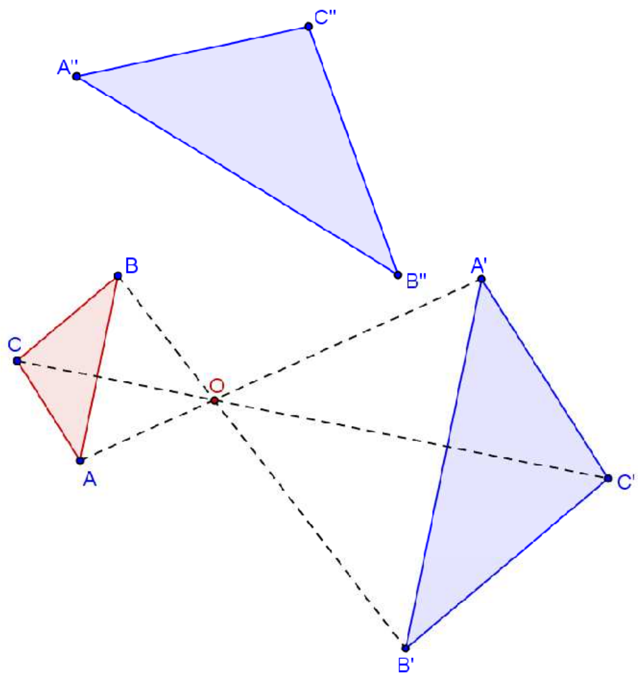
Due lati o due angoli che si corrispondono in una similitudine si dicono **omologhi**.

La similitudine gode di tutte le proprietà delle omotetie.

In particolare:

Se due poligoni sono simili, hanno gli angoli omologhi congruenti e i lati omologhi in proporzione.

Il rapporto fra due lati omologhi si chiama **rapporto di similitudine**.



SIMILITUDINI E TRIANGOLI

TRIANGOLI SIMILI

Due triangoli si dicono simili se:

- **hanno gli angoli rispettivamente congruenti;**
- **hanno i lati opposti agli angoli congruenti proporzionali.**

Primo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti, allora sono simili.

Secondo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno due lati ordinatamente in proporzione e l'angolo fra essi compreso congruente, allora sono simili.

Terzo criterio di similitudine dei triangoli

Se due triangoli hanno i lati ordinatamente in proporzione, allora sono simili.

Teorema – Proporzionalità fra gli elementi dei triangoli

In due triangoli simili, di rapporto di similitudine k:

- **il rapporto tra le misure di due altezze omologhe è uguale al rapporto di similitudine** $\frac{h}{h'} = k$
- **il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine** $\frac{p}{p'} = k$
- **il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine** $\frac{S}{S'} = k^2$.

SIMILITUDINI E POLIGONI

POLIGONI SIMILI

Due poligoni aventi lo stesso numero dei lati si dicono simili se:

- **hanno gli angoli rispettivamente congruenti;**
- **hanno i lati opposti agli angoli congruenti proporzionali.**

Teorema – Proporzionalità fra gli elementi di poligoni simili

In due poligoni simili, di rapporto di similitudine k:

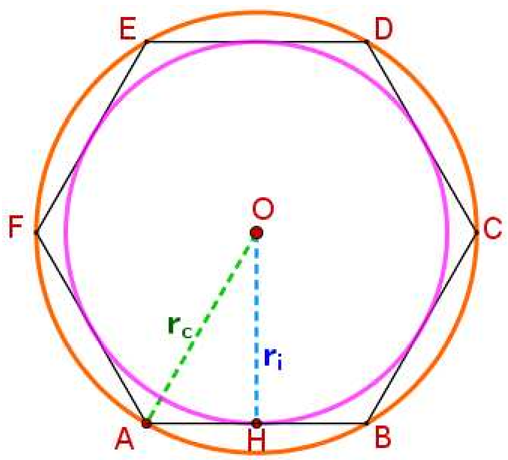
- **il rapporto tra le misure di due diagonali corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine $\frac{d}{d'} = k$**
- **il rapporto tra i perimetri è uguale al rapporto di similitudine $\frac{p}{p'} = k$**
- **il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine $\frac{S}{S'} = k^2$.**

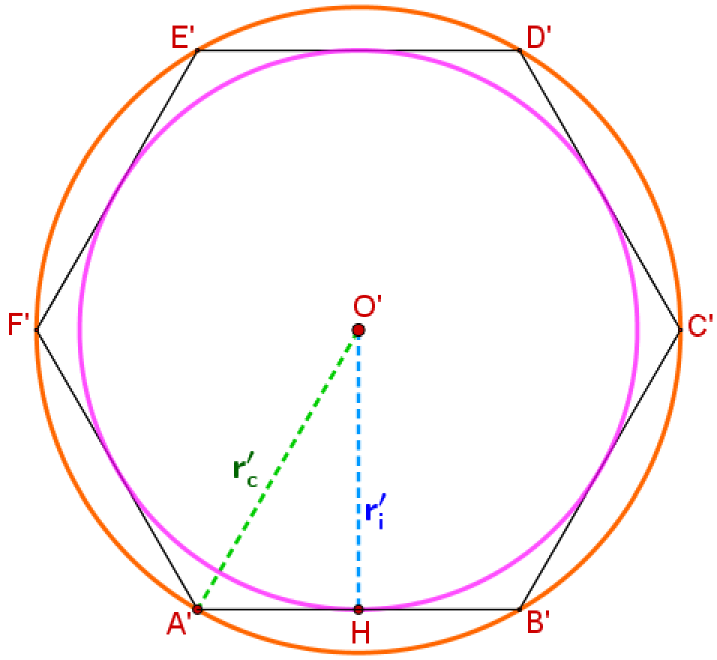
Teorema – Poligoni regolari e circonferenze inscritta e circoscritta

Il rapporto tra i perimetri di due poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati è uguale:

- **al rapporto tra le misure dei raggi delle circonferenze circoscritte;**
- **al rapporto tra le misure dei raggi delle circonferenze inscritte;**

$$p : p' = r_c : r'_c \qquad p : p' = r_i : r'_i$$

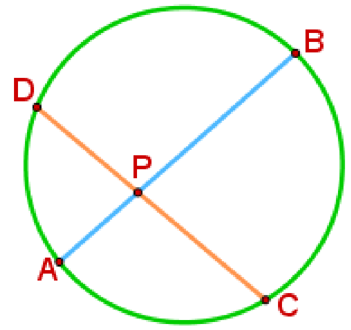




SIMILITUDINI E CIRCONFERENZA

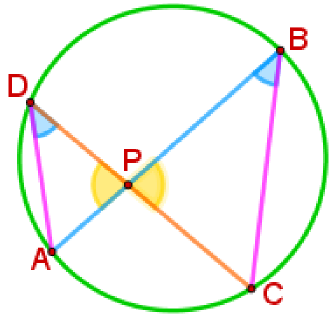
Teorema delle corde

Se due corde si intersecano in una circonferenza, le misure dei segmenti che si formano sulla prima corda e quelli che si formano sulla seconda corda, rispettivamente, sono i medi e gli estremi di una stessa proporzione.



$$\boldsymbol{PA : PC = PD : PB}$$

Dimostrazione



Congiungiamo i punti A con D e B con C.

I triangoli APD e BPC sono simili per il I° Criterio di similitudine.

Infatti hanno:

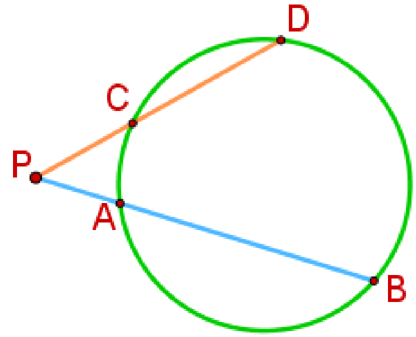
$A\hat{P}D \cong B\hat{P}C$ *perché angoli opposti al vertice P;*

$A\hat{D}P \cong P\hat{B}C$ *perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC.*

Pertanto i lati omologhi dei due triangoli sono in proporzione: $PA : PC = PD : PB$.

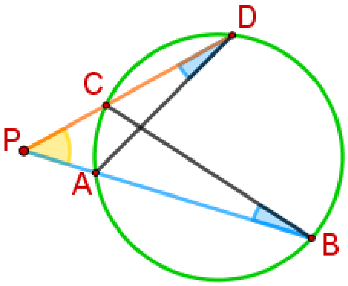
Teorema delle secanti

Se da un punto esterno P ad una circonferenza si conducono due secanti e si considerano i segmenti che hanno un estremo nel punto esterno P e l'altro nei punti di intersezione delle secanti con la circonferenza, le misure dei segmenti sulla prima secante sono gli estremi e le misure dei segmenti sulla seconda secante sono i medi di una stessa proporzione.



$$\boldsymbol{PC : PA = PB : PD}$$

Dimostrazione



Congiungiamo i punti A con D e B con C.

I triangoli APD e BCP sono simili per il I° Criterio di similitudine.

Infatti hanno:

L'angolo $\hat{P}$ *è in comune ai due triangoli;*

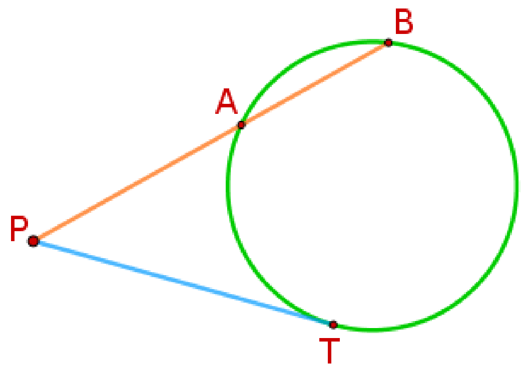
$P\hat{D}A \cong P\hat{B}C$ *perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AC*

Pertanto i lati omologhi dei due triangoli sono in proporzione: $PC : PA = PB : PD$.

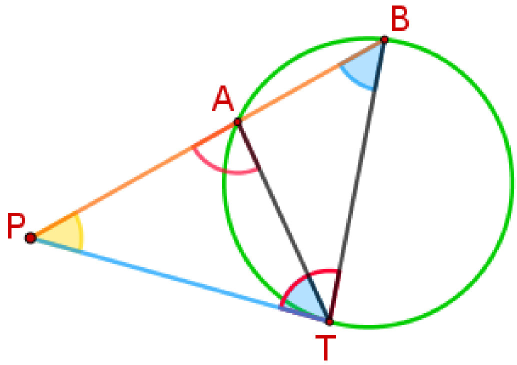
Teorema della secante e della tangente

Se da un punto esterno P ad una circonferenza si conducono una secante e una tangente, la misura del segmento di tangenza è medio proporzionale fra le misure dei segmenti che hanno un estremo nel punto esterno P e l'altro nei punti di intersezione della secante con la circonferenza.

$$\boldsymbol{PA : PT = PT : PB}$$



<u>*Dimostrazione*</u>



Congiungiamo il punto T con A e con B.

I triangoli PBT e PAT sono simili per il I° Criterio di similitudine.

Infatti hanno:

L'angolo $\hat{P}$ *è in comune ai due triangoli;*

$P\hat{T}A \cong P\hat{B}T$ *perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco AT.*

Pertanto i lati omologhi dei due triangoli sono in proporzione: $PA : PT = PT : PB$.