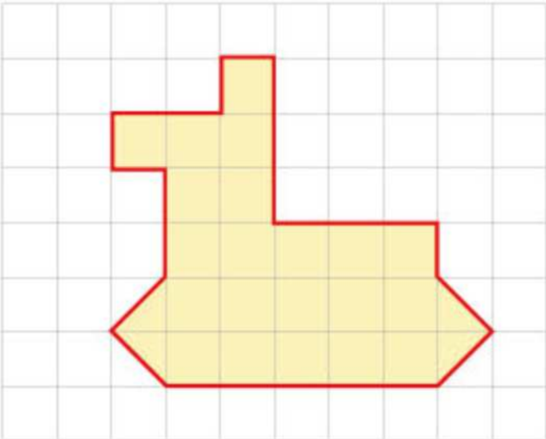
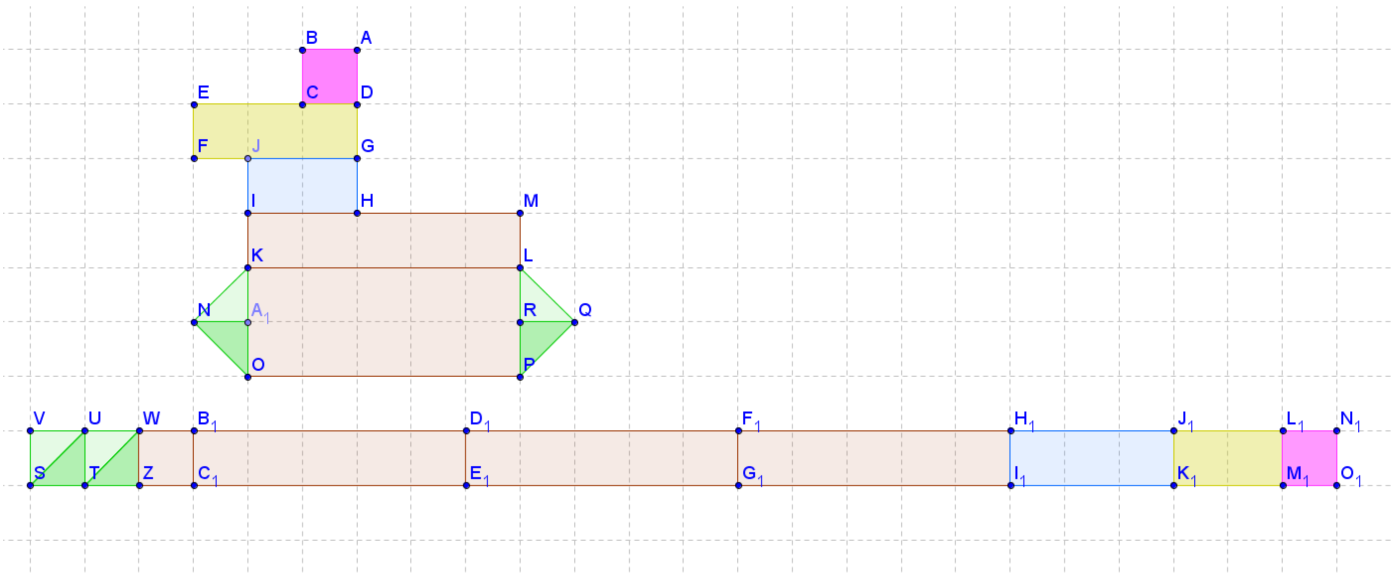
EQUIVALENZA ED EQUISCOMPONIBILITÀ

Esercizio 1

Trasforma il seguente poligono in rettangoli equivalenti scomponendoli e ricomponendoli opportunamente.

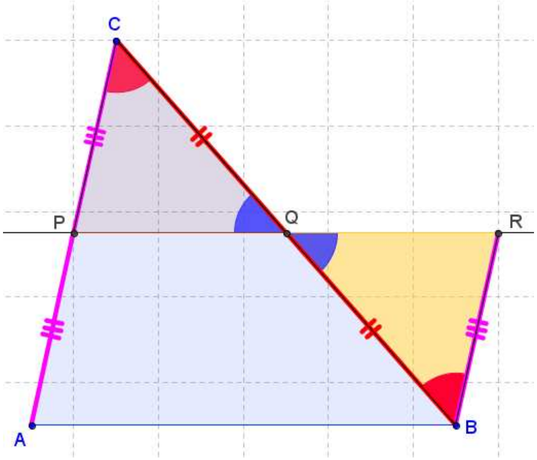


Soluzione



Esercizio 2

Dato un triangolo ABC, siano P e Q, rispettivamente, i punti medi di AC e BC. Indica con R il punto in cui la retta PQ interseca la retta parallela ad AC passante per B e dimostra che il parallelogramma ABRP e il triangolo ABC sono equivalenti.



IPOTESI		*TESI*
$AP \cong CP$ $BQ \cong CQ$ $BR \parallel AP$	$\Rightarrow$	$ABRP \doteq ABC$

Dimostrazione

È sufficiente dimostrare che il parallelogramma ABRP e il triangolo ABC sono equiscomponibili.

Infatti essi sono equiscomponibili in:

$ABRP \doteq ABQP + BQR$;

$ABC \doteq ABQP + PQC$;

Occorre però dimostrare che i triangoli PQC e BQR sono congruenti.

$BQR \cong PQC$ *per il II Criterio di Congruenza dei Triangoli. Infatti:*

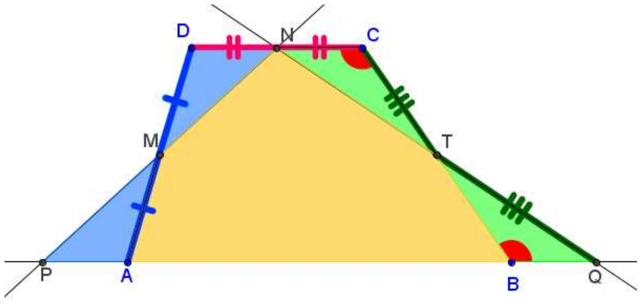
$BQ \cong CQ$ *per ipotesi*

$B\hat{Q}R \cong P\hat{Q}C$ *perché angoli opposti al vertice Q*

$Q\hat{B}R \cong P\hat{C}Q$ *perché angoli alterni interni fra le rette parallele AC e BR tagliate dalla trasversale BC.*

Esercizio 3

Sia ABCD un trapezio, di base maggiore AB e base minore CD. Indica con M, N e T i punti medi di AD, DC e BC. La retta MN incontra la retta AB in P e la retta NT incontra la retta AB in Q. Dimostra che il trapezio ABCD e il triangolo PQN sono equivalenti.



IPOTESI		*TESI*
ABCD è un trapezio $AM \cong DM$ $DN \cong CN$ $BT \cong CT$	$\Rightarrow$	$ABCD \doteq PQN$

<u>Dimostrazione</u>

È sufficiente dimostrare che il trapezio ABCD e il triangolo PQN sono equiscomponibili.

Infatti essi sono equiscomponibili in:

$ABCD \doteq ABTNM + DMN + CNT$;

$PQN \doteq ABTNM + APM + BQT$;

Occorre però dimostrare che i triangoli:

$DMN \cong APM$ *e* $CNT \cong BQT$

$DMN \cong APM$ *per il II Criterio di Congruenza dei Triangoli. Infatti:*

$DM \cong AM$ *per ipotesi*

$D\widehat{M}N \cong P\widehat{M}A$ *perché opposti al vertice T*

$N\widehat{D}M \cong P\widehat{A}M$ *perché angoli alterni interni fra le rette parallele PQ e DC tagliate dalla trasversale AD.*

$CNT \cong BQT$ *per il II Criterio di Congruenza dei Triangoli. Infatti:*

$CT \cong TQ$ *per ipotesi*

$C\widehat{T}N \cong B\widehat{T}Q$ *perché opposti al vertice T*

$D\widehat{C}T \cong Q\widehat{B}T$ *perché angoli alterni interni fra le rette parallele PQ e DC tagliate dalla trasversale BC.*

Esercizio 4

Vero o Falso

a. due rettangoli equivalenti hanno i lati rispettivamente congruenti V F

b. se due rettangoli equivalenti hanno le basi rispettivamente congruenti allora sono congruenti V F

c. due triangoli aventi i lati rispettivamente congruenti sono equivalenti V F

d. un triangolo e un rettangolo non possono mai essere equivalenti V F

e. se due trapezi equivalenti hanno le altezze rispettivamente congruenti allora sono congruenti V F

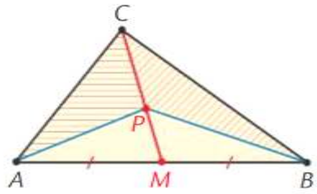
f. due triangoli equivalenti devono avere un lato e la relativa altezza rispettivamente congruenti V F

Soluzione

a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
F	V	V	F	F	F

Esercizio 5

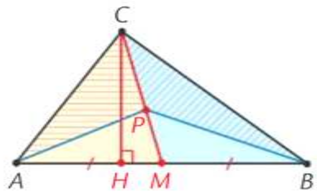
Dato un triangolo ABC, sia CM la mediana uscente da C. Considera un punto qualsiasi P su CM e dimostra che i due triangoli APC e BPC sono equivalenti.



IPOTESI $AM \cong MB$; $P \in CM$

TESI $APC \doteq BPC$

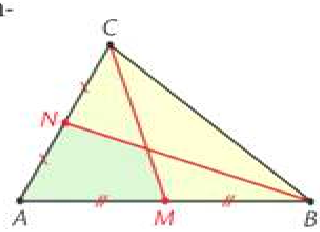
DIMOSTRAZIONE



- Considera i due triangoli ACM ed MCB. Essi hanno le basi AM ed MB congruenti e le relative altezze coincidono con CH, quindi sono equivalenti .
- Ragionando analogamente, puoi dedurre che anche i triangoli APM ed MPB sono equivalenti .
- Ne segue che APC e BPC sono equivalenti, in quanto differenze di poligoni equivalenti.

Esercizio 6

Siano M ed N i punti medi dei lati AB e AC di un triangolo ABC. Dimostra che i triangoli ANB e AMC sono equivalenti.



IPOTESI $AM \cong MB$, $AN \cong NC$

TESI $ANB \doteq AMC$

DIMOSTRAZIONE

- I due triangoli ANB e BNC hanno le basi AN ed NC, e le rispettive altezze congruenti quindi sono equivalenti.
  Di conseguenza

  $$ABC \doteq 2ANB$$

- Analogamente puoi dedurre che:

  $$ABC \doteq 2\ AMC$$

- Per la proprietà transitiva della relazione di equivalenza segue che:

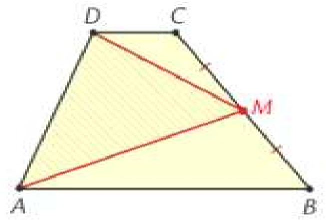
  $$2ANB \doteq 2\ AMC$$

  quindi:

  $$ANB \doteq AMC$$

Esercizio 7

Sia $ABCD$ un trapezio, di base maggiore AB e base minore CD. Indica con M il punto medio di BC e dimostra che il trapezio è equivalente al doppio del triangolo AMD.



IPOTESI $ABCD$ è un trapezio di basi AB e CD; $CM \cong MB$

TESI $ABCD \doteq 2\,AMD$

DIMOSTRAZIONE

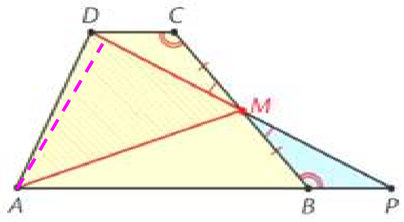
- Prolunga DM, dalla parte di M, fino a incontrare in P il prolungamento di AB.
- Dimostra che il trapezio $ABCD$ e il triangolo ADP sono equiscomponibili, quindi:

  $ABCD \doteq ADP$

- Dimostra che i due triangoli AMD e AMP sono equivalenti, quindi:

  $ADP \doteq 2\,AMD$

- Per la proprietà transitiva della relazione di equivalenza puoi dedurre la tesi.



Dimostrazione - 1° passo

Il trapezio *ABCD* e il triangolo *ADP* sono equiscomponibili in:

$ABCD \doteq ABMD + CDM$;

$ADP \doteq ABMD + BPM$;

Occorre però dimostrare che: $CDM \cong BMP$.

$DCM \cong BMP$ per il 2° Criterio di Congruenza dei Triangoli. Infatti hanno:

$CM \cong MB$ per ipotesi

$C\hat{M}D \cong B\hat{M}P$ perché opposti al vertice M

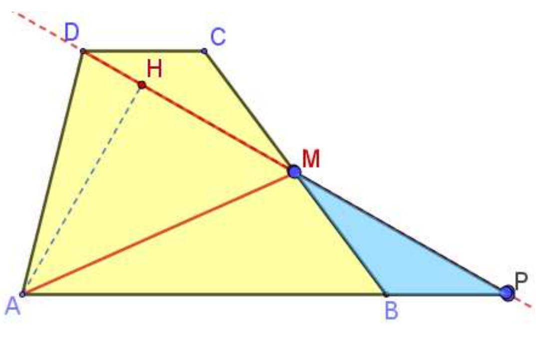
$D\hat{C}M \cong M\hat{B}P$ perché angoli alterni interni fra le rette parallele AB e DC tagliate dalla trasversale BC.

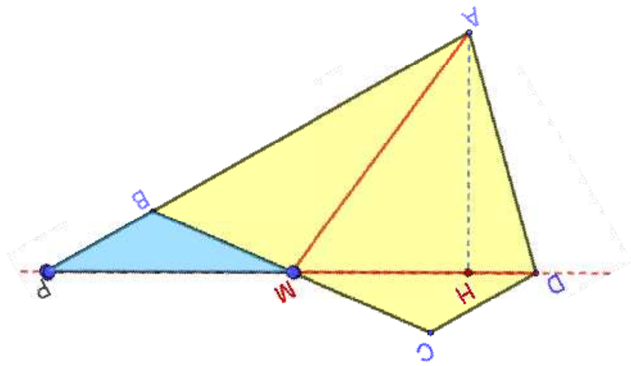
Dimostrazione - 2° passo

I due triangoli *AMD* e *AMP* sono equivalenti, perché hanno:

le basi *DM* e *MP* congruenti (per la dimostrazione precedente);

la stessa altezza *AH*.





Esercizio 8

La mediana di un triangolo divide il triangolo in due triangoli equivalenti.

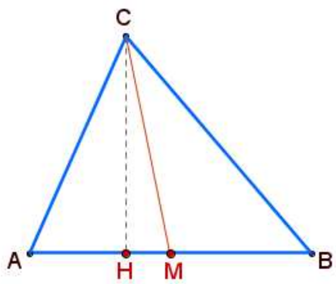
IPOTESI

$AM \cong BM$

$\Rightarrow$

TESI

$ACM \doteq BCM$



<u>*Dimostrazione*</u>

I due triangoli ACM e BCM hanno le basi congruenti per ipotesi.
L'altezza CH del triangolo ACM è anche altezza del triangolo BCM.
Ne segue che i due triangoli, avendo le basi e le altezze rispettivamente congruenti, sono equivalenti.

Esercizio 9

Dato un trapezio ABCD, di base maggiore AB e base minore CD, chiama P il punto di intersezione delle diagonali. Dimostra, nell'ordine, che:

1. **i due triangoli ACD e BCD sono equivalenti;**
2. **i due triangoli APD e BPC sono equivalenti.**

IPOTESI

ABCD è un trapezio di basi AB e CD ;
$AC \cap BD = \{P\}$.

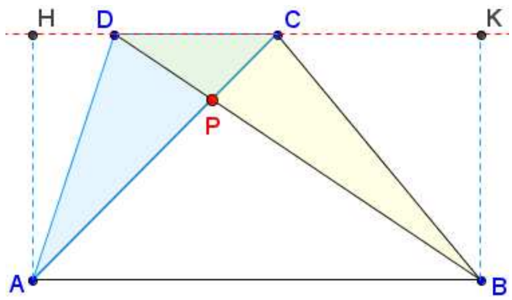
$\Rightarrow$

TESI

1. $ACD \doteq BCD$;
2. $APD \doteq BPC$.

<u>*Dimostrazione 1*</u>

I due triangoli ACD e BCD sono equivalenti.
Infatti:
hanno la stessa base CD;
hanno le altezze congruenti $AH \cong BK$.

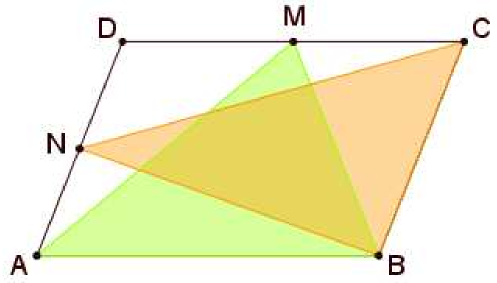


<u>*Dimostrazione 2*</u>

I due triangoli APD *e* BPC *sono equivalenti perché differenze di triangoli a due a due congruenti.*
Infatti:
$APD \cong ACD - CDP$;
$BPC \cong BCD - CDP$.

Esercizio 10

Dato un parallelogramma ABCD, sia M il punto medio di CD e N il punto medio di AD. Dimostra che i due triangoli AMB e BNC sono equivalenti.



IPOTESI		*TESI*
ABCD è un parallelogramma; *M è il punto medio di CD;* *N è il punto medio di AD.*	$\Rightarrow$	$AMB \doteq BNC$

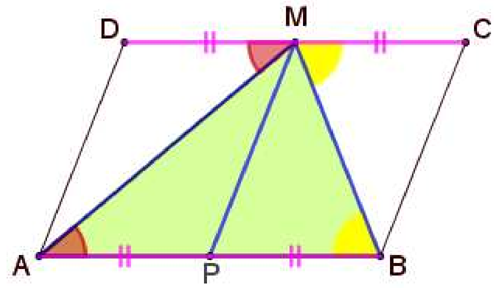
<u>Dimostrazione</u>

Dimostriamo innanzitutto che $AMB \doteq \frac{1}{2}ABCD$

Sia P il punto medio di AB.

I due triangoli AMP e AMD sono congruenti per il 1° C.C.T.

Infatti:



AM	*lato in comune ai due triangoli;*
$DM \cong AP$	*perché congruenti a ½ dei lati paralleli del parallelogramma;*
$A\widehat{M}D \cong P\widehat{A}M$	*angoli alterni interni fra le rette parallele AB e DC tagliate dalla trasversale AM.*

I due triangoli BMP e BMC sono congruenti per il 1° C.C.T.

Infatti:

BM	*lato in comune ai due triangoli;*
$MC \cong PB$	*perché congruenti a ½ dei lati paralleli del parallelogramma;*
$C\widehat{M}B \cong P\widehat{B}M$	*angoli alterni interni fra le rette parallele AB e DC tagliate dalla trasversale AM.*

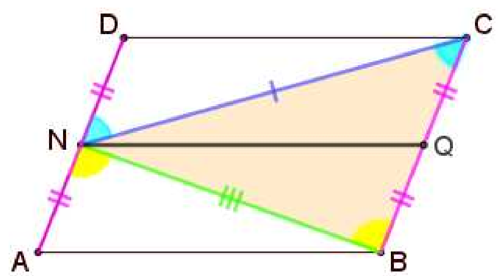
Si conclude che: $AMB \doteq \frac{1}{2}ABCD$.

Dimostriamo ora che $BNC \doteq \frac{1}{2}ABCD$

Sia Q il punto medio di BC.

I due triangoli ANB e QNB sono congruenti per il 1° C.C.T.

Infatti:



BN	*lato in comune ai due triangoli;*
$AN \cong BQ$	*perché congruenti a ½ dei lati paralleli del parallelogramma;*
$A\widehat{N}B \cong N\widehat{B}Q$	*angoli alterni interni fra le rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BN.*

I due triangoli DCN e QCN sono congruenti per il 1° C.C.T.

Infatti:

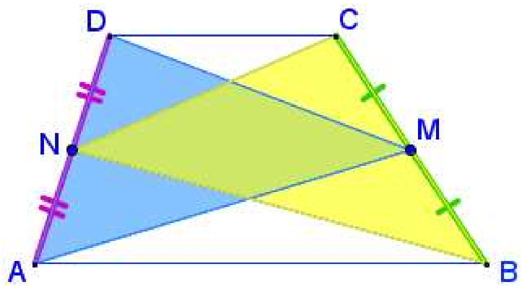
CN	*lato in comune ai due triangoli;*
$DN \cong CQ$	*perché congruenti a ½ dei lati paralleli del parallelogramma;*
$D\widehat{N}C \cong N\widehat{C}Q$	*angoli alterni interni fra le rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale NC.*

Si conclude che: $BNC \doteq \frac{1}{2}ABCD$.

In definitiva si ha: $AMB \doteq BNC$ *perché entrambi equivalenti a* $\frac{1}{2}ABCD$.

Esercizio 11

Dato un trapezio ABCD, considera i due triangoli che hanno ciascuno per base uno dei due lati obliqui e per terzo vertice il punto medio del lato opposto. Dimostra che tali triangoli sono equivalenti.

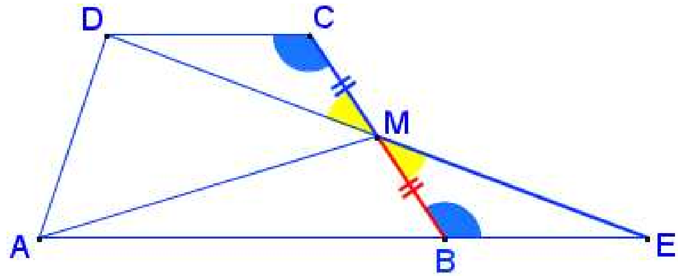


IPOTESI		TESI
ABCD è un trapezio $AN \cong ND$ $BM \cong MC$	$\Rightarrow$	$ADM \doteq BCN$

<u>*Dimostrazione*</u>

I^a Parte

Prolunghiamo DM dalla parte di M fino a incontrare nel punto E il prolungamento della base AB.



Il trapezio $ABCD$ *e il triangolo* ADE *sono equivalenti*
[$ABCD \doteq ADE$] .
Infatti i due poligoni sono equiscomposti:
Il trapezio $ABCD$ *è scomposto in* $ABMD$ *e* CDM.
Il triangolo ADE *è scomposto in* $ABMD$ *e* BEM.
Il quadrilatero $ABMD$ *è comune al trapezio* $ABCD$ *e al triangolo* ADE.
Mentre i triangoli $CDM \cong BEM$ *per il 2° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:*

- $BM \cong MC$ *per ipotesi*
- $D\hat{C}M \cong E\hat{B}M$ *perché angoli alterni interni fra le rette parallele AE e DC tagliate dalla trasversale BC*
- $C\hat{M}D \cong B\hat{M}E$ *perché angoli opposti al vertice M.*

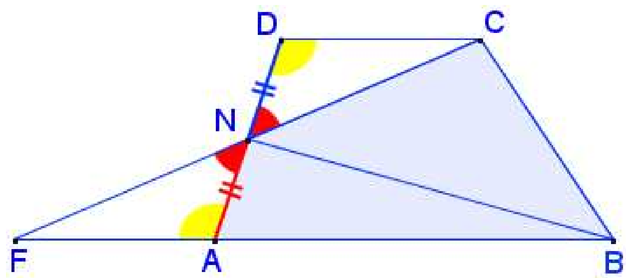
I triangoli $ADM \doteq AEM$ *sono equivalenti.*
Infatti hanno:

- *le basi congruenti* $DM \cong EM$ *perché i triangoli* $CDM \cong BEM$
- *la stessa altezza.*

Pertanto, $ADE \doteq 2\ ADM$
Avendo dimostrato che: $ABCD \doteq ADE$ *e* $ADE \doteq 2ADM$ *, per la proprietà transitiva,* $ABCD \doteq 2ADM$.

II^a Parte

Prolunghiamo CN dalla parte di N fino a incontrare nel punto F il prolungamento della base AB.
Il trapezio $ABCD$ *e il triangolo* BCF *sono equivalenti*
[$ABCD \doteq BCF$] .
Infatti i due poligoni sono equiscomposti:
Il trapezio $ABCD$ *è scomposto in* $ABCN$ *e* CDN.
Il triangolo BCF *è scomposto in* $ABCN$ *e* AFN.
Il quadrilatero $ABCN$ *è comune al trapezio* $ABCD$ *e al triangolo* BCF.



Mentre i triangoli $CDN \cong AFN$ *per il 2° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:*

- $AN \cong ND$ *per ipotesi*
- $C\hat{D}N \cong F\hat{A}N$ *perché angoli alterni interni fra le rette parallele AE e DC tagliate dalla trasversale AD*
- $A\hat{N}F \cong C\hat{N}D$ *perché angoli opposti al vertice N.*

I triangoli $BCN \doteq FNB$ *sono equivalenti.*
Infatti hanno:
le basi congruenti $CN \cong FN$ *perché i triangoli* $CDN \cong AFN$
la stessa altezza.

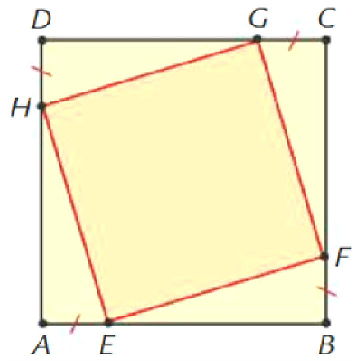
Pertanto, $BCF \doteq 2\ BCN$
Avendo dimostrato che: $ABCD \doteq BCF$ *e* $BCF \doteq 2BCN$ *, per la proprietà transitiva,* $ABCD \doteq 2BCN$.

Conclusioni

Nella I^a *Parte abbiamo dimostrato che:* $ABCD \doteq 2\ ADM$.
Nella II^a *Parte abbiamo dimostrato che:* $ABCD \doteq 2\ BCN$.
Per la proprietà transitiva si ha: $2\ ADM \doteq 2\ BCN$.
Si ha pertanto la tesi: $ADM \doteq BCN$.

Esercizio 12

Nella figura accanto il lato del quadrato ABCD è lungo 4 cm. Determina la lunghezza dei segmenti congruenti AE, BF, CG e DH, in modo che l'area del quadrato EFGH sia 10 cm^2.



Soluzione

Poniamo $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$, *con* $0 < x < 4$.

Imponiamo che: $S_{EFGH} = 10\ cm^2$.

$S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{DGH} - S_{CFG} - S_{BEF} = 10\ cm^2$

Osserviamo che: $S_{AEH} = S_{DGH} = S_{CFG} = S_{BEF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - x)$.

Si ottiene:

$S_{ABCD} - 4 \cdot S_{AEH} = 10\ cm^2$;

$4 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot (4 - x) = 10$;

$16 - 2x \cdot (4 - x) = 10$;

$16 - 8x + 2x^2 - 10 = 0$;

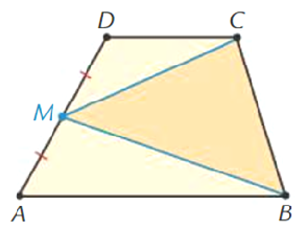
$2x^2 - 8x + 6 = 0$;

$x^2 - 4x + 3 = 0$; $\frac{\Delta}{4} = 4 - 3 = 1$; $x_{1,2} = 2 \mp \sqrt{1} = \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_1 = 3 \end{matrix}$

Soluzioni entrambe accettabili.

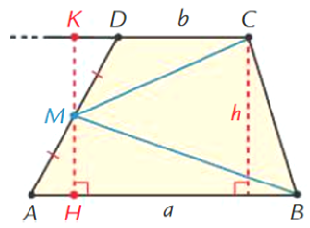
Esercizio 13

Dato un trapezio ABCD, di base maggiore AB e base minore CD, indica con M il punto medio del lato obliquo AD e congiungi M con B e C. Dimostra che l'area di BMC e la metà dell'ara di ABCD.



IPOTESI		TESI
ABCD è un trapezio $AM \cong MD$	$\Rightarrow$	$S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

<u>*Dimostrazione*</u>



Poniamo: $\overline{AB} = a$; $\overline{CD} = b$; *l'altezza* $\overline{HK} = h$.

Per il piccolo teorema di Talete:

Essendo $AM \cong MD \quad \Rightarrow \quad MH \cong MK$.

Pertanto: $\overline{MH} = \overline{MK} = \frac{h}{2}$.

Si ricava :

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{HK} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{ah+bh}{2}$$

$$S_{BMC} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{CDM} = \frac{ah+bh}{2} - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2} = \frac{ah+bh}{2} - \frac{1}{4} ah - \frac{1}{4} bh =$$

$$= \frac{2ah + 2bh - 1ah - 1bh}{4} = \frac{ah+bh}{4} .$$

Si ha pertanto la tesi: $S_{BMC} = \frac{ah+bh}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ah+bh}{2} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.