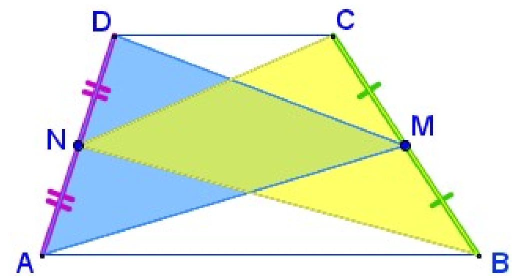
# EQUISCOMPONIBILITÀ

**Problema P.367.41**

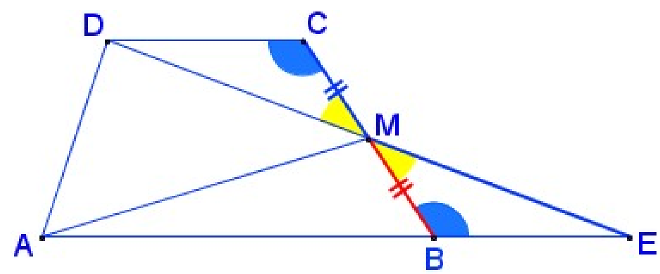



Dato un trapezio ABCD, considera i due triangoli che hanno ciascuno per base uno dei due lati obliqui e per terzo vertice il punto medio del lato opposto. Dimostra che tali triangoli sono equivalenti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un trapezio<br>$AN \cong ND$<br>$BM \cong MC$ | $\Rightarrow$ | $ADM \doteq BCN$ |

<u>*Dimostrazione*</u>

Iª Parte




Prolunghiamo DM dalla parte di M fino a incontrare nel punto E il prolungamento della base AB.

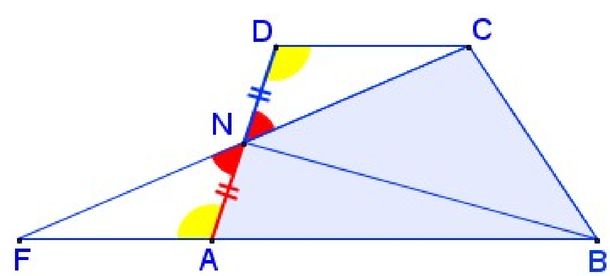
Il trapezio $ABCD$ e il triangolo $ADE$ sono equivalenti $[\,ABCD \doteq ADE\,]$.
Infatti i due poligoni sono equiscomposti:
Il trapezio $ABCD$ è scomposto in $ABMD$ e $CDM$.
Il triangolo $ADE$ è scomposto in $ABMD$ e $BEM$.
Il quadrilatero $ABMD$ è comune al trapezio $ABCD$ e al triangolo $ADE$.
Mentre i triangoli $CDM \cong BEM$ per il 2° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

| | |
|---|---|
| $BM \cong MC$ | per ipotesi |
| $D\hat{C}M \cong E\hat{B}M$ | perché angoli alterni interni fra le rette parallele AE e DC tagliate dalla trasversale BC |
| $C\hat{M}D \cong B\hat{M}E$ | perché angoli opposti al vertice M. |

I triangoli $ADM \doteq AEM$ sono equivalenti.
Infatti hanno:
le basi congruenti $\mathrm{DM} \cong \mathrm{EM}$ perché i triangoli $CDM \cong BEM$
la stessa altezza.

Pertanto, $ADE \doteq 2\,ADM$
Avendo dimostrato che: $ABCD \doteq ADE$ e $ADE \doteq 2ADM$ , per la proprietà transitiva, $ABCD \doteq 2ADM$ .

IIª Parte




Prolunghiamo CN dalla parte di N fino a incontrare nel punto F il prolungamento della base AB.
Il trapezio $ABCD$ e il triangolo $BCF$ sono equivalenti $[\,ABCD \doteq BCF\,]$.
Infatti i due poligoni sono equiscomposti:
Il trapezio $ABCD$ è scomposto in $ABCN$ e $CDN$.
Il triangolo $BCF$ è scomposto in $ABCN$ e $AFN$.
Il quadrilatero $ABCN$ è comune al trapezio $ABCD$ e al triangolo $BCF$.
Mentre i triangoli $CDN \cong AFN$ per il 2° Criterio di congruenza dei triangoli. Infatti:

| | |
|---|---|
| $AN \cong ND$ | per ipotesi |
| $C\hat{D}N \cong F\hat{A}N$ | perché angoli alterni interni fra le rette parallele AE e DC tagliate dalla trasversale AD |
| $A\hat{N}F \cong C\hat{N}D$ | perché angoli opposti al vertice N. |

I triangoli $BCN \doteq BFN$ sono equivalenti.
Infatti hanno:
le basi congruenti CN ≅ FN perché i triangoli $CDN \cong AFN$
la stessa altezza.

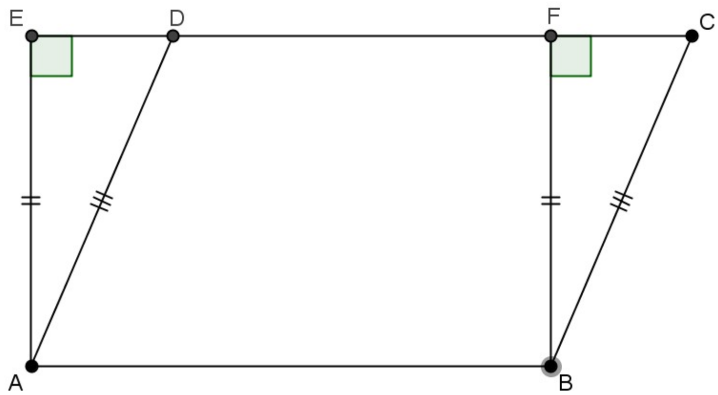
Pertanto, $BCF \doteq 2\,BCN$
Avendo dimostrato che: $ABCD \doteq BCF$ e $BCF \doteq 2BCN$ , per la proprietà transitiva, $ABCD \doteq 2BCN$ .

Conclusioni
Nella I$^{a}$ Parte abbiamo dimostrato che: $ABCD \doteq 2\,ADM$ .
Nella II$^{a}$ Parte abbiamo dimostrato che: $ABCD \doteq 2\,BCN$ .
Per la proprietà transitiva si ha: $2\,ADM \doteq 2\,BCN$ .
Si ha pertanto la tesi: $ADM \doteq BCN$ .

### Problema G2.360.1

È dato il parallelogrammo ABCD: dai vertici A e B si conducano le perpendicolari alla retta del lato CD e siano rispettivamente E e F i piedi di tali perpendicolari su CD. Si supponga inoltre che il punto F sia interno al lato CD. Dimostrare che il parallelogrammo ABCD è equivalente al rettangolo AEFB.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un parallelogrammo<br>$AED \cong BFC \cong 90°$ | $\Rightarrow$ | $ABCD \doteq AEFB$ |




*Dimostrazione*

I due triangoli AED e BFC sono congruenti per il IV C.C.T.R. Infatti:

$AE \cong BF$ perché altezze del rettangolo AEFB

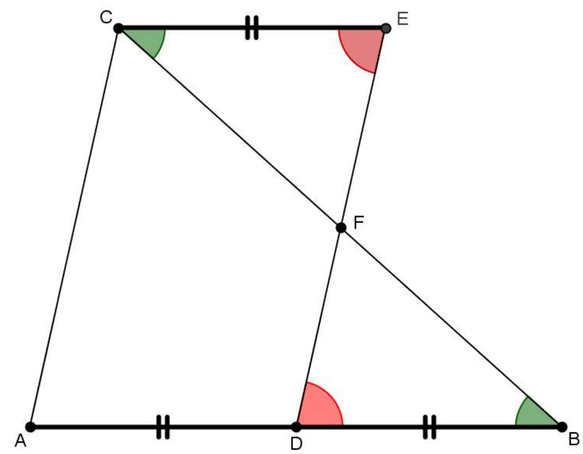
$AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogrammo ABCD

Pertanto, essendo il parallelogrammo ABCD e il rettangolo AEFB equicomposti nelle coppie di poligoni congruenti $AED \cong BFC$ e $ADFB \cong ADFB$, si conclude che i due quadrilateri ABCD e AEFB sono equivalenti.

### Problema G2.360.2

Sia D il punto medio del lato AB del triangolo ABC; si costruisca il parallelogrammo ADEC, essendo E il punto di intersezione tra le parallele condotte da C e da D rispettivamente ai lati AB e AC. Dimostrare che triangolo e parallelogrammo risultano equivalenti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABC è un triangolo<br>ADEC è un parallelogrammo<br>$AD \cong DB$ | $\Rightarrow$ | $ABC \doteq ADEC$ |




*Dimostrazione*

I due triangoli CEF e DFB sono congruenti per il IV C.C.T.R.
Infatti:

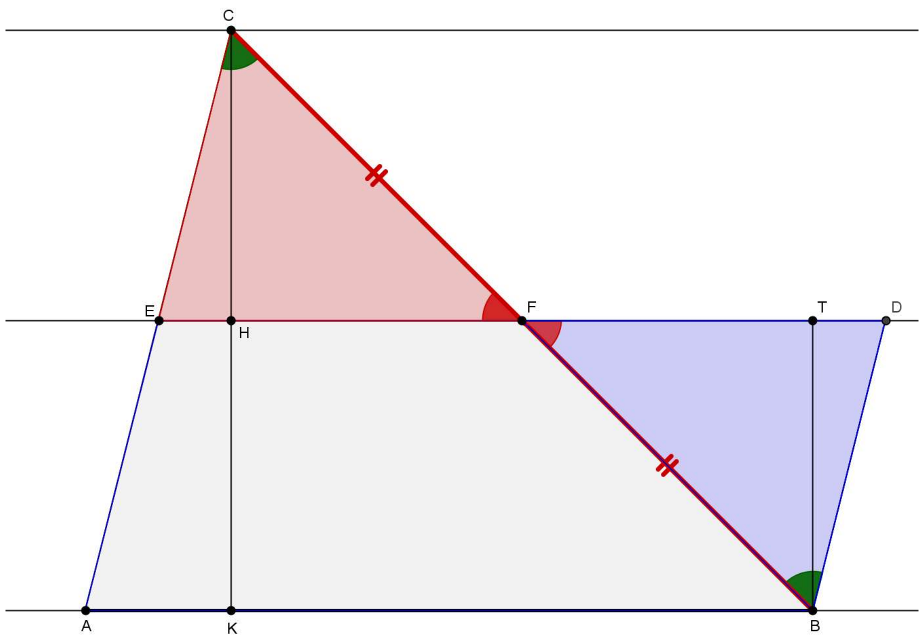
$CE \cong DB$ per costruzione
$C\hat{E}F \cong B\widehat{D}F$ perché alterni interni
$F\hat{C}E \cong F\hat{B}D$ perché alterni interni

Pertanto, essendo il triangolo ABC e il parallelogrammo ADEC equicomposti nelle coppie di poligoni congruenti $CEF \cong DFB$ e $ADFC \cong ADFC$, si conclude che:
$ABC \doteq ADEC$ .

**Problema G2.360.3**

Dimostrare che un triangolo ABC è equivalente al parallelogrammo ABDE avente la stessa base AB del triangolo e per altezza la metà dell'altezza del triangolo.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABC è un triangolo<br>ABDE è un parallelogrammo<br>$HK \cong \frac{1}{2} CK$ | $\Rightarrow$ | $ABC \doteq ABDE$ |




*Dimostrazione*

I due triangoli EFC e FBD sono congruenti per il II C.C.T.
Infatti:
$E\hat{F}C \cong B\hat{F}D$ perché angoli opposti al vertice
$E\hat{C}F \cong F\hat{B}D$ perché angoli alterni interni
$CF \cong FB$ per il T. di Talete applicato alle tre rette parallele AB, DE e la retta passante per C
( $CH \cong CK \quad \Rightarrow \quad CF \cong FB$ )

Pertanto si conclude che: $ABC \doteq ABDE$ perché equicomposti nelle due coppie di figure congruenti:

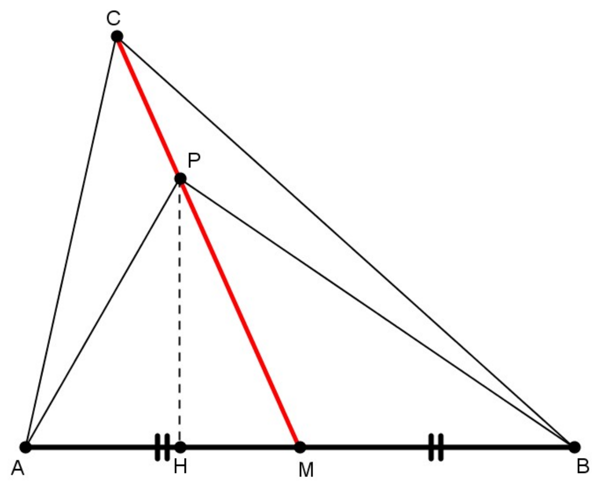
$ECF \cong FDB$ e $ABFE \cong AFE$ .

### Problema G2.360.4

Sia CM la mediana del triangolo ABC relativa al lato AB. Detto P un punto qualsiasi di CM, dimostrare che:

1. I triangoli AMP e BMP sono equivalenti
2. I triangoli APC e BPC sono equivalenti

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABC è un triangolo<br>$AM \cong MB$ | $\Rightarrow$ | $AMP \doteq BMP$<br>$APC \doteq BPC$ |




*Dimostrazione*

I triangoli AMP e BMP sono equivalenti perché hanno:
le basi $AM \cong MB$ per ipotesi
la medesima altezza PH.

I triangoli AMC e BMC sono equivalenti perché hanno:
le basi $AM \cong MB$ per ipotesi
la medesima altezza.

I triangoli APC e BPC sono equivalenti perché sono differenze di coppie di triangoli equivalenti. Infatti:

$$APC \cong AMC - AMP$$
$$BPC \cong BMC - BMP$$

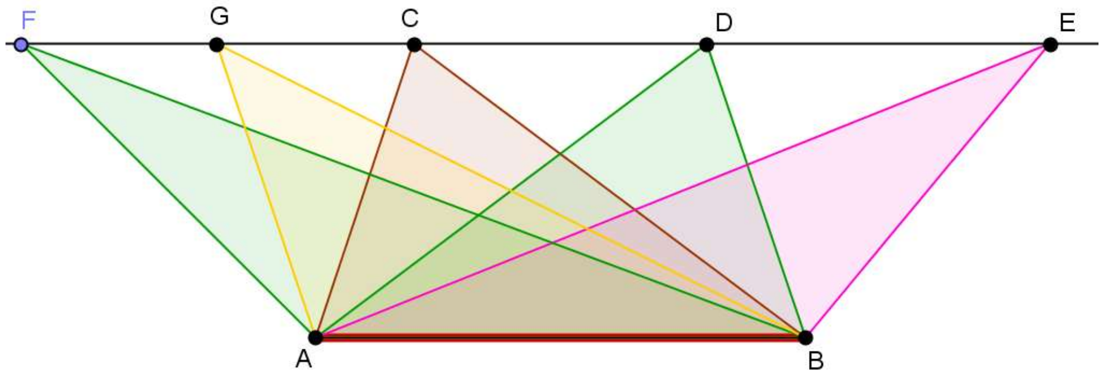
**Problema G2.360.5**

Qual è il luogo dei vertici dei triangoli equivalenti aventi la stessa base.

*Soluzione*

Il luogo dei vertici dei triangoli equivalenti aventi la stessa base è una retta passante per i vertici comuni e parallela alla base del triangolo.

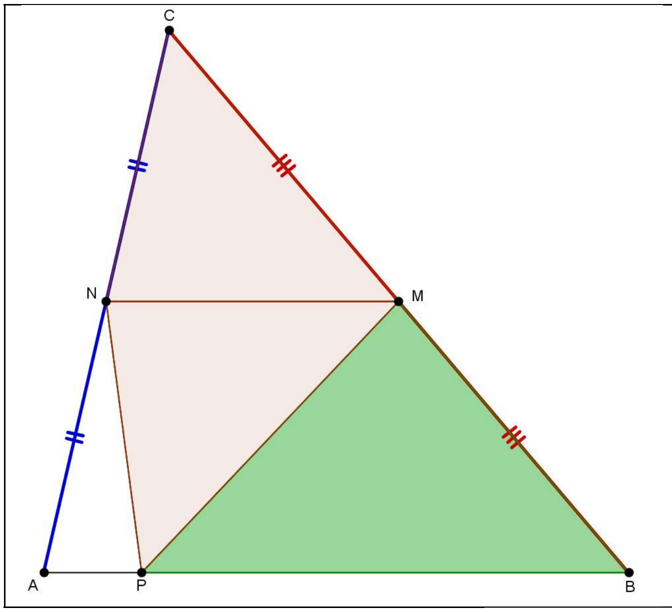
Infatti i triangoli, per risultare equivalenti, devono avere tutti altezze congruenti: ciò si ottiene se i vertici appartengono ad una retta parallela alla base.

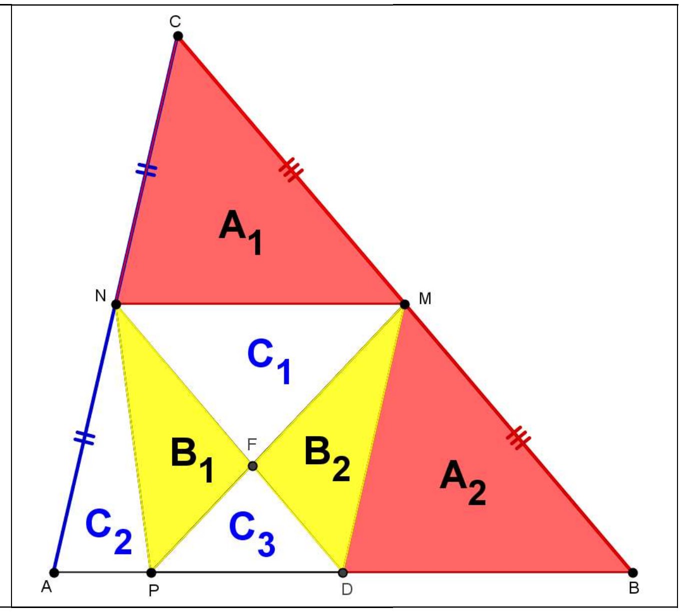


**Problema G2.360.9**

Congiungendo un punto di un lato di un triangolo con i punti medi degli altri due lati, si forma un quadrilatero equivalente a metà triangolo.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABC è un triangolo<br>$AN \cong NC$<br>$CM \cong MB$ | $\Rightarrow$ | $CNPM \doteq \frac{1}{2} ABC$ |




*Dimostrazione*

Per dimostrare che $CNPM \doteq \frac{1}{2} ABC$ è sufficiente dimostrare che: $CNPM \doteq ANP + PMB$ .

Essendo N e M, rispettivamente, i punti medi dei lati AC e BC $\Rightarrow$ $NM \parallel AB$ (T. di Talete).

Tracciamo il punto medio D del lato AB $\Rightarrow$ il segmento MD risulta parallelo al lato AC (T. di Talete) e il segmento ND risulta parallelo al lato BC (T. di Talete).

I triangoli $A_1 \doteq A_2$. Infatti:

le basi $CM \cong MB$ per ipotesi
le altezze sono congruenti perché distanze fra le due rette parallele BC e ND.

I triangoli $NMP \doteq NMD$. Infatti:
la base NM è in comune
le altezze sono congruenti perché sono le distanze fra le due rette parallele NM e AB.

I triangoli $B_1 \doteq B_2$ perché differenze di poligono equivalenti. Infatti:

$$B_1 \doteq NMP - C_1$$
$$B_2 \doteq NMD - C_1$$

I triangoli $AND \cong NMD$ perché ND è la diagonale del parallelogrammo ANMD.
Pertanto: $C_1 \doteq C_2 + C_3$ . Infatti:

$$C_1 \doteq NMD - B_2$$
$$C_2 + C_3 \doteq AND - B_1$$

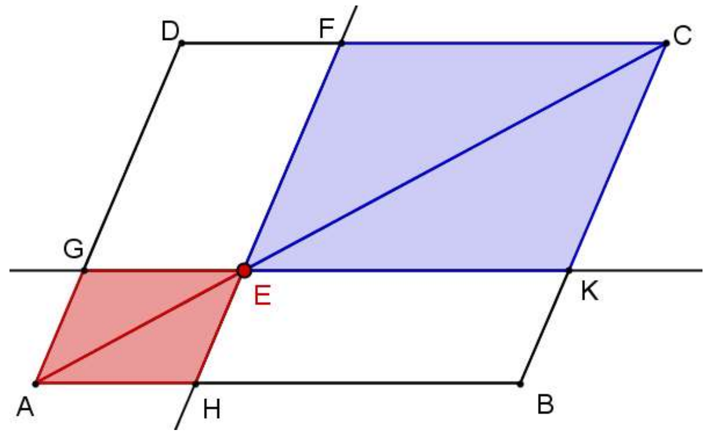
Si conclude pertanto che: $CNPM \doteq ANP + PMB$ . Infatti:

$$CNPM \doteq A_1 + B_1 + C_1$$
$$ANP + PMB \doteq A_2 + B_2 + C_2 + C_3 \; .$$

**Problema G2.360.11**

Se per un punto di una diagonale di un parallelogrammo si conducono le parallele ai lati, il parallelogrammo rimane scomposto in altri quattro, dei quali i due non attraversati dalla diagonale sono equivalenti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un parallelogrammo | $\Rightarrow$ | $GDFE \doteq HEKB$ |




*Dimostrazione*

I parallelogrammi $GDFE$ e HEKB sono equivalenti perché differenza di poligoni equivalenti:

$GDFE \doteq ACD - AEG - ECF$ e

$HEKB \doteq ABC - AHE - EKC$ .

Infatti:

$ACD \doteq ABC$ perché hanno basi congruenti e altezze congruenti.

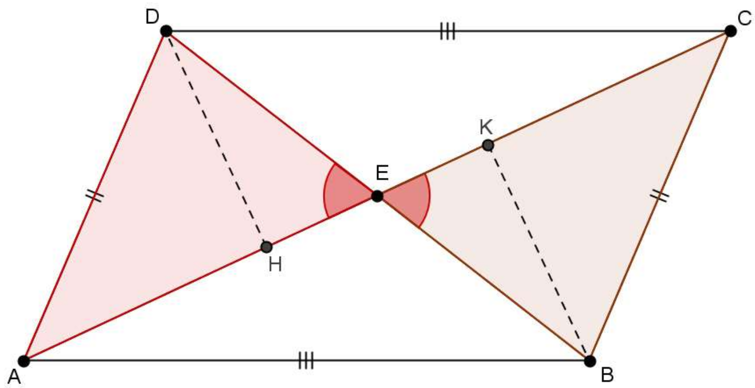
$AEG \doteq AHE$ perché hanno basi congruenti e altezze congruenti.

$ECF \doteq EKC$ perché hanno basi congruenti e altezze congruenti.

**Problema G2.360.12**

Le diagonali di un parallelogrammo lo dividono in quattro triangoli equivalenti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un parallelogrammo | $\Rightarrow$ | $ADE \doteq AEB \doteq BEC \doteq DCE$ |




*Dimostrazione*

I triangoli $ADE \cong BEC$ sono congruenti per il I C. C. T. Infatti:

$DE \cong EB$ e $AE \cong EC$ perché le diagonali si dimezzano scambievolmente.

$D\hat{E}A \cong B\hat{E}C$ perché angoli opposti al vertice.

I triangoli $DCE \cong AEB$ sono congruenti per il I C. C. T. Infatti:

$DE \cong EB$ e $EC \cong AE$ perché le diagonali si dimezzano scambievolmente.

$D\hat{E}C \cong A\hat{E}B$ perché angoli opposti al vertice.

i triangoli $ADE \doteq DCE$. Infatti:

le basi $AE \cong EC$ perché le diagonali si dimezzano scambievolmente.

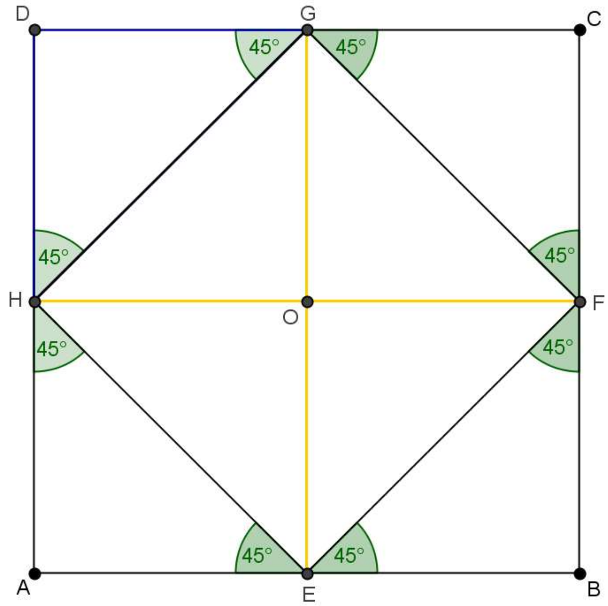
hanno la stessa altezza DH.

Per la proprietà transitiva si ha: $ADE \doteq AEB \doteq BEC \doteq DCE$ .

**Problema B2.76.60**

Unisci i punti medi dei lati di un quadrato e dimostra che si ottiene un quadrato equivalente alla metà di quello dato.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un quadrato<br>$AE \cong EB \cong BF \cong FC \cong CG \cong GD \cong DH \cong HA$ | $\Rightarrow$ | $EFGH \doteq \frac{1}{2} ABCD$ |




*Dimostrazione*

I triangoli in cui è suddiviso il quadrato ABCD sono tutti triangoli rettangoli ed isosceli, e tutti congruenti. Infatti:

I triangoli $DGH \cong GCF$ per il I C. C. T. R. Infatti:

$DG \cong GC$ perché metà di segmenti congruenti

$DH \cong CF$ perché metà di segmenti congruenti

Similmente si dimostra che i triangoli: $GCF \cong FBE \quad FBE \cong EAH \quad EAH \cong DG$ .

Pertanto il quadrilatero EFGH ha i quattro lati congruenti. Per dimostrare che è un quadrato occorre dimostrare che ha i quattro angoli retti. Ma ciò si evince dalla figura.

Infatti, essendo $D\hat{G}H \cong F\hat{G}C \cong 45° \Rightarrow H\hat{G}F \cong 180° - 45° - 45° \cong 90°$.

Similmente si dimostra che: $GFE \cong FEH \cong EHG \cong 90°$ .

I triangoli $DGH \cong HGO$ per il II C. C. T. R. Infatti:

HG ipotenusa in comune

$D\hat{G}H \cong H\hat{G}O \cong 45°$

Similmente si dimostra che i triangoli: $GCF \cong GFO \quad FBE \cong FEO \quad EAH \cong EHO$ .

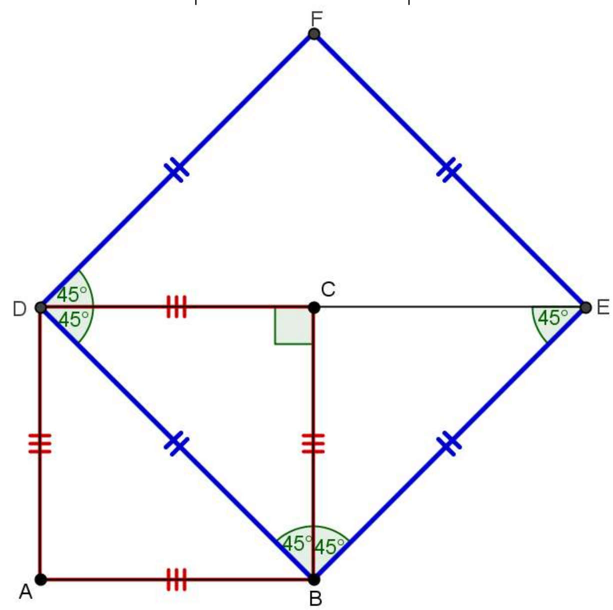
Per la proprietà transitiva si ha che i triangoli in cui è suddiviso il quadrato ABCD sono tutti congruenti.

Pertanto si conclude che: $EFGH \doteq \frac{1}{2} ABCD$ .

**Problema B2.76.61**

Considera un quadrato ABCD e costruisci sulla diagonale DB un nuovo quadrato $DBB^ID^I$. Dimostra che ABCD è equivalente alla metà di $DBB^ID^I$.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un quadrato<br>$DBB^ID^I$ è un quadrato | $\Rightarrow$ | $ABCD \doteq \frac{1}{2} DBB^ID^I$ |




*Dimostrazione*

I triangoli $ADB \cong BDC$ perché la diagonale divide il quadrato in due triangoli congruenti.

I triangoli $BDC \cong BCE$ per il I C. C. T. Infatti:

BC è in comune

$BD \cong BE$ perché lati del quadrato $DBB^ID^I$

$C\hat{B}D \cong E\hat{B}C \cong 45°$ perché $E\hat{B}D = 90°$

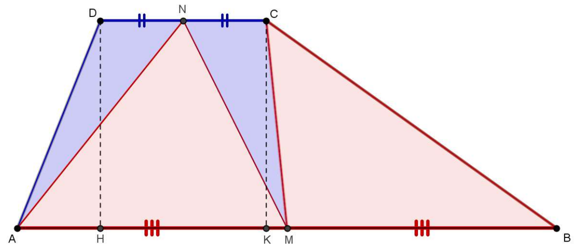
Avendo dimostrato che i triangoli BDC e BCE sono congruenti si ha che: $B\hat{C}E \cong D\hat{C}B \cong 90°$ .
Ciò vuol dire che i punti D, C, E sono allineati $\Rightarrow$ DE è la diagonale del quadrato $DBB^ID^I$
$\Rightarrow$ DE divide Il quadrato $DBB^ID^I$ nei due triangoli congruenti BDE e DFE.

Inoltre, per la proprietà transitiva, si ha che: $ADB \cong BCE$ .
Si conclude pertanto che: $ABCD \doteq BDE \doteq \frac{1}{2} DBB^ID^I$ .

**Problema B2.77.66**

Considera un trapezio ABCD e i punti medi M e N dei due lati paralleli. Dimostra che la congiungente MN divide la figura in due trapezi equicomposti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un trapezio | $\Rightarrow$ | $AMND \doteq MBCN$ |




*Dimostrazione*

I triangoli $ADN \doteq NCM$ perché hanno:

le basi $DN \cong NC$

le altezze $DH \cong CK$ perché distanze fra le due rette parallele AB e DC.

I triangoli $ANM \doteq MCB$ perché hanno:

le basi $AM \cong MB$

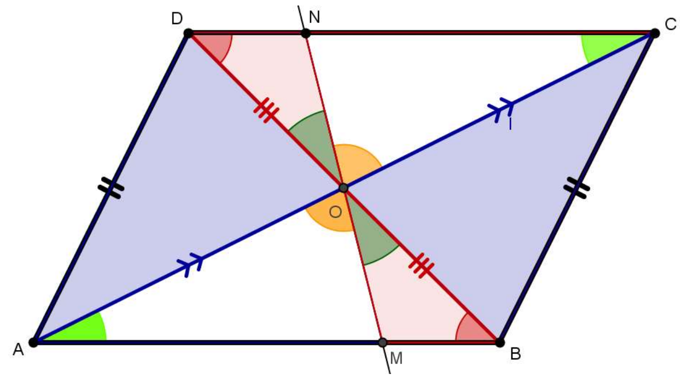
le altezze congruenti perché distanze fra le due rette parallele AB e DC.

Si conclude pertanto che: $\mathrm{AMND} \doteq \mathrm{MBCN}$ perché somma di poligoni a due a due equivalenti.

**Problema B2.77.67**

Rappresenta un parallelogrammo ABCD, indica con O il punto di intersezione delle diagonali AC e DB. Traccia una qualsiasi retta passante per il punto O e indica con M e N le rispettive intersezioni con i lati AB e CD. Dimostra che i due trapezi AMND e MBCN sono equivalenti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABCD è un parallelogrammo | $\Rightarrow$ | $AMND \doteq MBCN$ |




*Dimostrazione*

Per dimostrare che: $AMND \doteq MBCN$ è sufficiente dimostrare che sono equicomposti.

I triangoli $ADO \cong BOC$ per il $\mathrm{III}$ C. C. T. Infatti:

$AD \cong BC$ perché lati opposti del parallelogrammo ABCD
$AO \cong OC$ perché semidiagonali del parallelogrammo ABCD
$DO \cong OB$ perché semidiagonali del parallelogrammo ABCD

I triangoli $ODN \cong OBM$ per il $\mathrm{II}$ C. C. T. Infatti:

$DO \cong OB$ perché semidiagonali del parallelogrammo ABCD
$O\hat{D}N \cong O\hat{B}M$ perché angoli alterni interni
$N\hat{O}D \cong M\hat{O}B$ perché angoli opposti al vertice

I triangoli $AOM \cong ONC$ per il $\mathrm{II}$ C. C. T. Infatti:

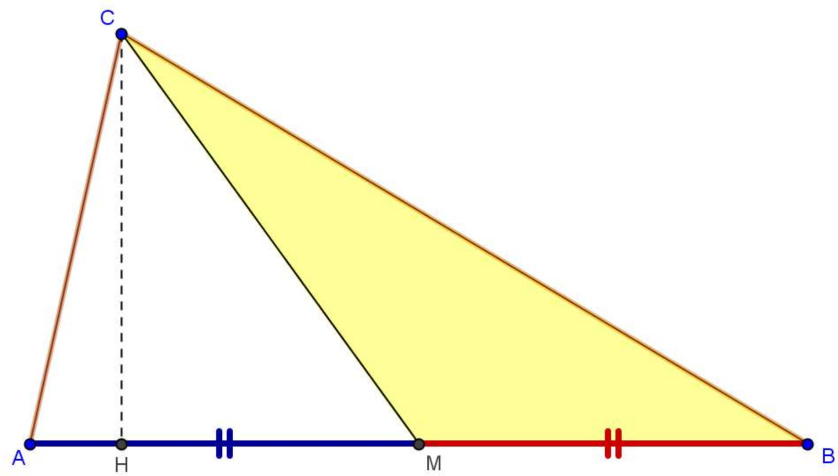
$AO \cong OC$ perché semidiagonali del parallelogrammo ABCD
$M\hat{A}O \cong N\hat{C}O$ perché angoli alterni interni
$A\hat{O}M \cong C\hat{O}N$ perché angoli opposti al vertice

Avendo dimostrato che i due trapezi sono equicomposti si ha che: $\mathrm{AMND} \doteq \mathrm{MBCN}$ .

**Problema B2.77.68**

Rappresenta un triangolo ABC e traccia una mediana. Dimostra che si ottengono due triangoli equivalenti.

| IPOTESI | | TESI |
|---|---|---|
| ABC è un triangolo<br>$AM \cong MB$ | $\Rightarrow$ | $ACM \doteq MCB$ |




*Dimostrazione*

I due triangoli ACM e MCB sono equivalenti perché hanno:

le basi AM e MB congruenti

la stessa altezza CH.