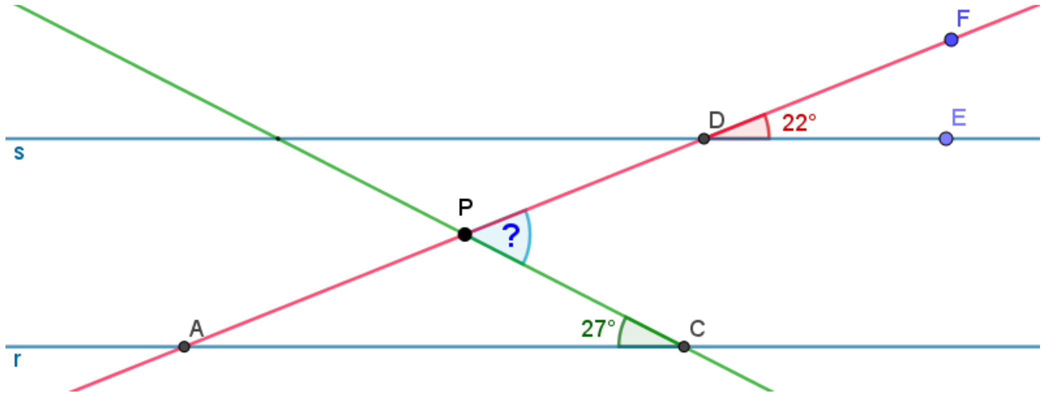
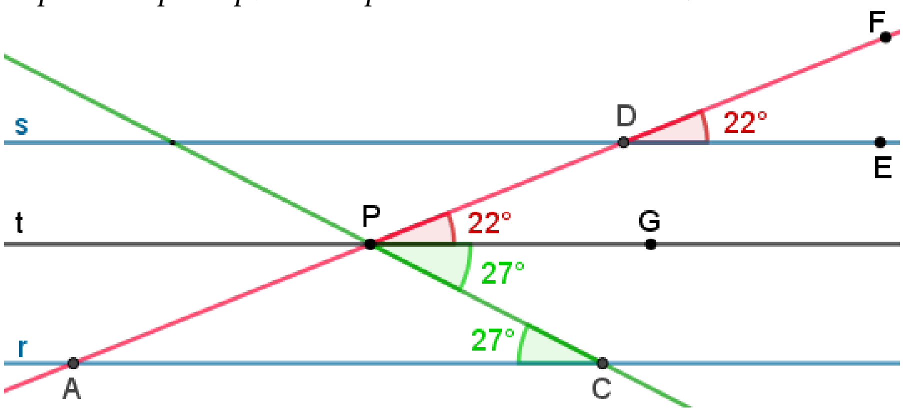
Esercizio 1

Determina l'ampiezza dell'angolo indicato con il punto interrogativo in figura, sapendo che $r \parallel s$.



<u>*Soluzione*</u>

Tracciamo una retta t passante per il punto P e parallela alle rette r ed s.



Si ottiene:

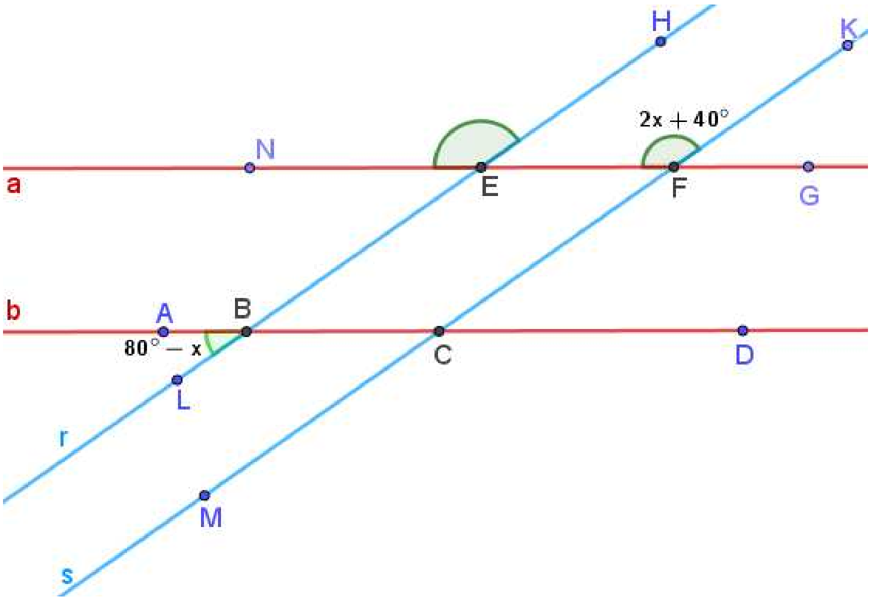
$D\hat{P}G = F\hat{D}E = 22°$ *perché angoli corrispondenti fra le rette parallele s e t tagliate dalla trasversale PD;*

$C\hat{P}G = A\hat{C}P = 27°$ *perché angoli alterni interni fra le rette parallele r e t tagliate dalla trasversale PC.*

$C\hat{P}D = D\hat{P}G + C\hat{P}G = 22° + 27° = 49°$.

Esercizio 2

In figura $a \parallel b$ e $r \parallel s$. Determina il valore di x.



Soluzione

$N\hat{E}H = E\hat{F}K = 2x + 40°$ *angoli corrispondenti fra le rette parallele s e t tagliate dalla trasversale a;*

$N\hat{E}H + A\hat{B}L = 180°$ *angoli coniugati esterni fra le rette parallele a e b tagliate dalla trasversale r.*

Sostituendo le misure degli angoli si ha:

$N\hat{E}H + A\hat{B}L = 180°$;

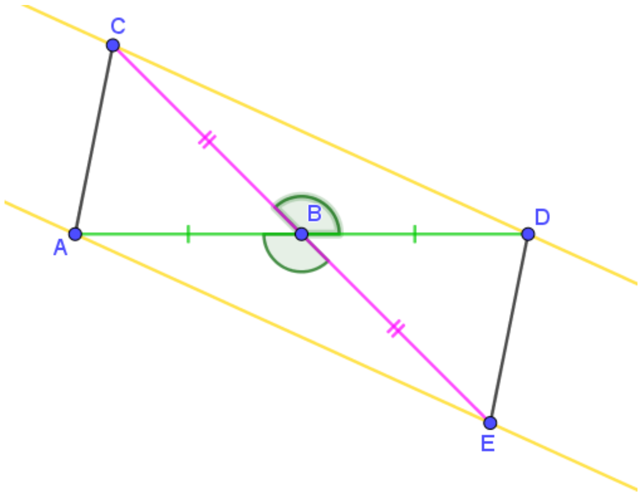
$(2x + 40) + (80 - x) = 180$;

$2x - x = 180 - 40 - 80$;

$x = 60$.

Esercizio 3

Dato un triangolo ABC, prolunga il lato AB, dalla parte di B, di un segmento $BD \cong AB$ e il lato BC, dalla parte di B, di un segmento $BE \cong BC$. Dimostra che la retta AE è parallela alla retta CD.



IPOTESI		*TESI*
$BD \cong AB$; $BE \cong BC$; *A, B e D sono allineati ;* *C, B e E sono allineati ;*	$\Rightarrow$	$AE \parallel CD$

Dimostrazione

I triangoli ABE e BCD sono congruenti per il 1° C. C. T. Infatti hanno:

$AB \cong BD$ *per costruzione*

$BE \cong BC$ *per costruzione*

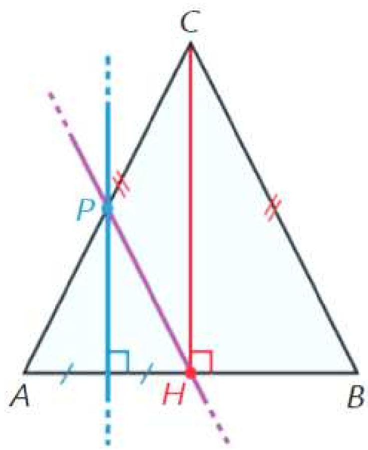
$A\hat{B}E \cong C\hat{B}D$ *perché angoli opposti al vertice B;*

Avendo dimostrato che i triangoli $ABE \cong BCD$, *si ricava che:* $B\hat{D}C \cong B\hat{A}E$

Essendo questi ultimi angoli alterni interni fra le rette AE e CD tagliate dalla trasversale AD, si conclude che le rette AE e CD sono parallele.

Esercizio 4

In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, sia CH l'altezza relativa ad AB. L'asse del segmento AH incontra il lato AC nel punto P. Dimostra che la retta PH è parallela alla retta BC.



IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo isoscele sulla base AB; *CH è l'altezza relativa ad AB;*	$\Rightarrow$	$PH \parallel BC$

Dimostrazione

$PA \cong PH$ *perché P appartiene all'asse del segmento AH.*

Essendo $PA \cong PH$, *si ha che APH è un triangolo isoscele sulla base AH.*

Quindi $P\hat{H}A \cong P\hat{A}H$.

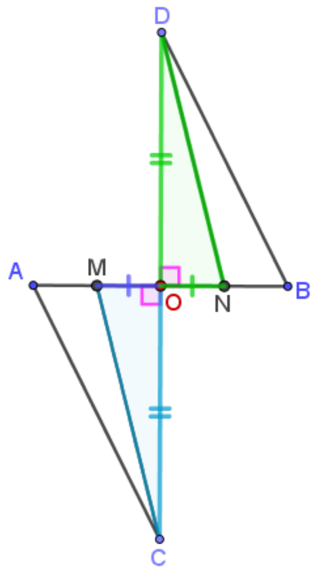
Inoltre $P\hat{A}H \cong C\hat{B}A$ *perché APC è un triangolo isoscele sulla base AB.*

Per la proprietà transitiva, si ottiene: $P\hat{H}A \cong C\hat{B}A$.

Essendo questi ultimi angoli corrispondenti fra le rette PH e BC tagliate dalla trasversale AB, si conclude che le rette PH e BC sono parallele.

Esercizio 5

Due segmenti AB e CD sono tra loro perpendicolari e il punto medio O di AB coincide con il punto medio di CD. Dimostra che la mediana relativa ad AO del triangolo AOC è parallela alla mediana relativa a OB del triangolo BOD.



IPOTESI		*TESI*
$AB \perp CD$; *O è il punto medio di AB ;* *O è il punto medio di CD ;* $AM \cong MO$; $\quad ON \cong NB$;	$\Rightarrow$	$CM \parallel DN$

<u>*Dimostrazione*</u>

Per dimostrare che le due mediane sono parallele occorre individuare angoli alterni interni (o esterni) congruenti, o angoli corrispondenti congruenti o angoli coniugati interni (o esterni) supplementari.

Per dimostrare ciò occorre individuare due triangoli congruenti da cui estrapolare gli angoli che ci servono per la dimostrazione.

Consideriamo i triangoli CMO e DNO.

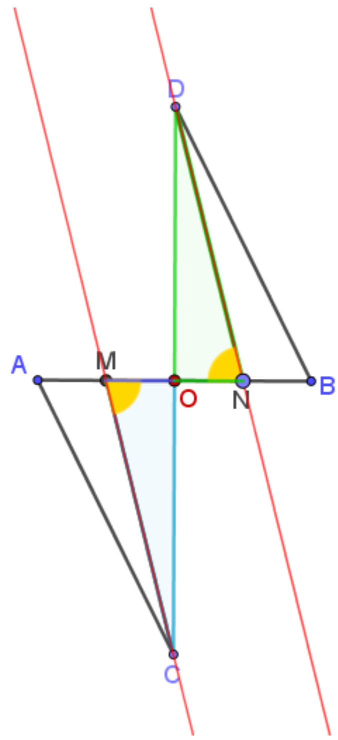
I triangoli CMO e DNO sono congruenti per il 1° C. C. T. Infatti hanno:

$MO \cong ON$ $\quad$ *perché* $MO \cong \frac{1}{2}AO$

ma $AO \cong OB \quad \Rightarrow \quad MO \cong \frac{1}{2}OB \cong ON$;

$OC \cong OD$ $\quad$ *perché O è il punto medio di CD ;*

$M\hat{O}C \cong N\hat{O}D$ $\quad$ *perché angoli retti.*



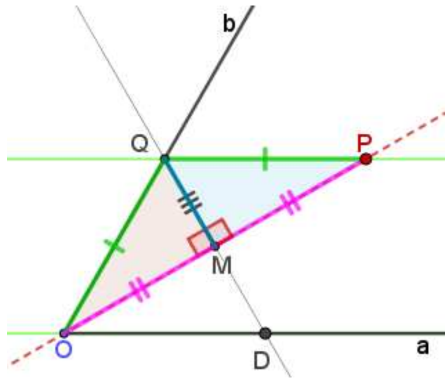
Avendo dimostrato che i triangoli CMO e DNO sono congruenti,

si ricava che gli angoli $C\hat{M}O \cong D\hat{N}O$ *sono congruenti.*

Ed essendo questi angoli alterni interni fra le rette CM e DN tagliate dalla trasversale AB, si conclude che le mediane CM e DN sono parallele.

Esercizio 6

Sulla bisettrice di un angolo acuto $a\hat{O}b$, considera un punto P e traccia l'asse del segmento OP. Detto Q il punto in cui tale asse incontra la semiretta b, dimostra che la retta PQ è parallela alla retta a cui appartiene la semiretta a.



IPOTESI		*TESI*
OP è la bisettrice di $a\hat{O}b$; *P appartiene alla bisettrice di* $a\hat{O}b$; *QM è l'asse del segmento OP* ;	$\Rightarrow$	$PQ \parallel OD$

Dimostrazione

Per dimostrare che le due rette sono parallele occorre individuare angoli alterni interni (o esterni) congruenti, o angoli corrispondenti congruenti o angoli coniugati interni (o esterni) supplementari.

Per dimostrare ciò occorre individuare due triangoli congruenti da cui estrapolare gli angoli che ci servono per la dimostrazione.

Consideriamo i triangoli OMQ e PMQ.

I triangoli OMQ e PMQ sono congruenti per il 3° C. C. T.
Infatti hanno:
$QO \cong QP$ *perché QM è l'asse del segmento OP;*
$OM \cong MP$ *perché QM è l'asse del segmento OP;*
QM *lato in comune ai due triangoli.*

Avendo dimostrato che i triangoli OMQ e PMQ sono congruenti,

si ricava che gli angoli $Q\hat{P}M \cong Q\hat{O}M$ *sono congruenti.*

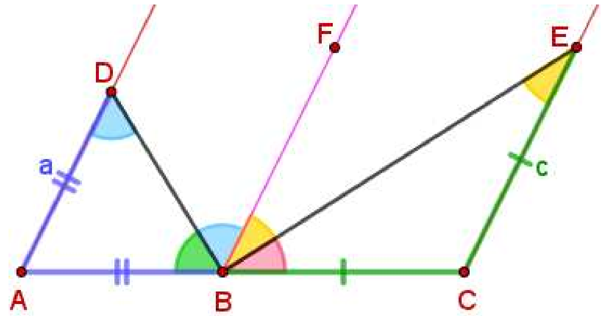
Ma OP è la bisettrice dell'angolo $a\hat{O}b$ *, quindi:* $Q\hat{O}M \cong D\hat{O}M$.

Per la proprietà transitiva si ha: $Q\hat{P}M \cong D\hat{O}M$

Ed essendo questi angoli alterni interni fra le rette PQ e OD tagliate dalla trasversale OP, si conclude che le rette PQ e OD sono parallele.

Esercizio 7

Dati due segmenti adiacenti AB e BC, traccia due semirette parallele a e c, aventi come origine rispettivamente A e C, e giacenti dalla stessa arte rispetto alla retta AC. Considera poi sulla semiretta a il punto D tale che $\mathrm{AD} \cong \mathrm{AB}$ e sulla semiretta c il punto E tale che $\mathrm{CE} \cong \mathrm{BC}$. Dimostra che $\mathrm{D\hat{B}E}$ è un angolo retto.



IPOTESI		TESI
AB e BC sono segmenti adiacenti; *a e c sono semirette parallele con origine rispettivamente in A e C;* $AD \cong AB$; $CE \cong BC$	$\Rightarrow$	$D\hat{B}E$ *è un angolo retto*

<u>*Dimostrazione*</u>

$A\hat{B}D \cong A\hat{D}B$ *perché* $AD \cong AB$*;*

$A\hat{D}B \cong D\hat{B}F$ *perché angoli alterni fra le rette parallele AD e BF tagliate dalla trasversale BD;*

$A\hat{B}D \cong D\hat{B}F$ *per la proprietà transitiva.*

$E\hat{B}F \cong B\hat{E}C$ *perché angoli alterni fra le rette parallele BF e CE tagliate dalla trasversale BE;*

$B\hat{E}C \cong C\hat{B}E$ *perché* $BC \cong CE$*;*

$E\hat{B}F \cong C\hat{B}E$ *per la proprietà transitiva.*

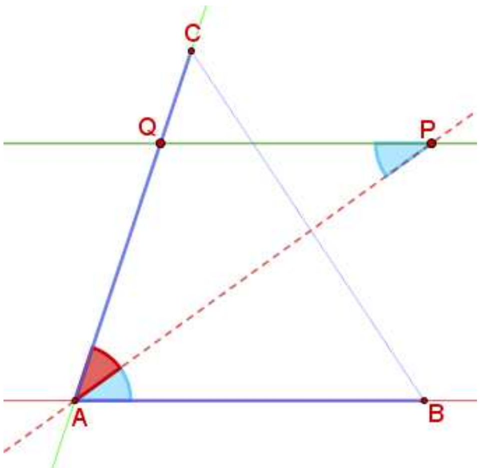
Pertanto si ha:

$$D\hat{B}E \;\cong\; D\hat{B}F + E\hat{B}F \;\cong\; \frac{1}{2}A\hat{B}F + \frac{1}{2}C\hat{B}F \;\cong\; \frac{1}{2}\left(A\hat{B}F + C\hat{B}F\right) \;\cong\; \frac{1}{2}A\hat{B}C\,;$$

Essendo $A\hat{B}C = 180°$ *(AB e BC sono segmenti adiacenti) si conclude che:* $D\hat{B}E = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

Esercizio 8

In un triangolo ABC, sia AP la bisettrice dell'angolo $\hat{\mathrm{A}}$. Conduci da P la parallela ad AB; chiama Q il punto in cui essa incontra il lato AC. Dimostra che il triangolo APQ è isoscele sulla base AP.



IPOTESI		TESI
ABC è un triangolo; *AP è la bisettrice di* $\hat{A}$ *;* $PQ \parallel AB$.	$\Rightarrow$	*APQ è un triangolo isoscele su base AP*

<u>*Dimostrazione*</u>

Per dimostrare che il triangolo APQ è isoscele è sufficiente dimostrare che ha gli angoli alla base congruenti.

Consideriamo quindi le rette parallele AB e PQ tagliate dalla trasversale AP. Ricaviamo che:

$A\hat{P}Q \cong B\hat{A}P$ *perché angoli alterni interni.*

$B\hat{A}P \cong P\hat{A}Q$ *perchè AP è la bisettrice dell'angolo* $\hat{A}$

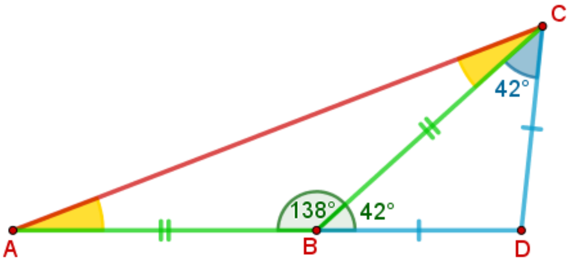
$A\hat{P}Q \cong P\hat{A}Q$ *per la proprietà transitiva.*

Si conclude che il triangolo APQ è un triangolo isoscele sulla base AP.

Esercizio 9

Il triangolo ABC è isoscele sulla base AC e BCD è isoscele sulla base BC. Supponiamo di sapere che l'ampiezza dell'angolo $B\hat{C}D$ è 42°. Qual è l'ampiezza degli angoli alla base di ABC?

IPOTESI		*TESI*
ABC è un triangolo isoscele su base AC; *BCD è un triangolo isoscele su base BC;* $B\hat{C}D = 42°$	$\Rightarrow$	$C\hat{A}B = ?$



Dimostrazione

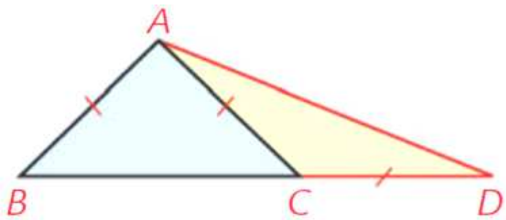
$C\hat{B}D = B\hat{C}D = 42°$ *perchè BCD è un triangolo isoscele sulla base BC*

$A\hat{B}C = 180° - C\hat{B}D = 180° - 42° = 138°$.

$$C\hat{A}B = \frac{180° - A\hat{B}C}{2} = \frac{180° - 138°}{2} = 21° .$$

Esercizio 10

In un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, prolunga BC, dalla parte di C, di un segmento $CD \cong AC$. Dimostra che gli angoli alla base del triangolo isoscele ACD sono la metà degli angoli alla base del triangolo ABC.



IPOTESI		*TESI*
$AB \cong CD \cong AC$ *B, C e D sono allineati*	$\Rightarrow$	$C\hat{A}D \cong \frac{1}{2} A\hat{C}B$

Dimostrazione

Per il teorema dell'angolo esterno si ha: $A\hat{C}B \cong C\hat{A}D + A\hat{D}C$;

Essendo $AC \cong CD$ *si ha:* $C\hat{A}D \cong A\hat{D}C$.

Pertanto: $A\hat{C}B \cong 2\, C\hat{A}D$ *cioè la tesi:* $C\hat{A}D \cong \frac{1}{2} A\hat{C}B$.

Esercizio 11

Dato un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, traccia una retta parallela ad AB che incontra AC e BC rispettivamente, in P e Q. Dimostra che il triangolo PQC è isoscele.

IPOTESI		*TESI*
ABC *è un triangolo isoscele sulla base AB;* $PQ \parallel AB$.	$\Rightarrow$	PQC *è un triangolo isoscele sulla base* PQ

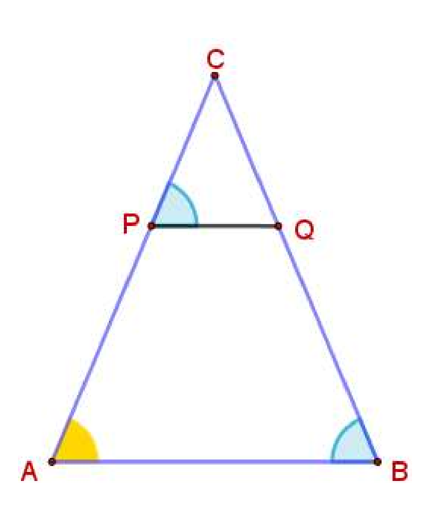


Figura 1

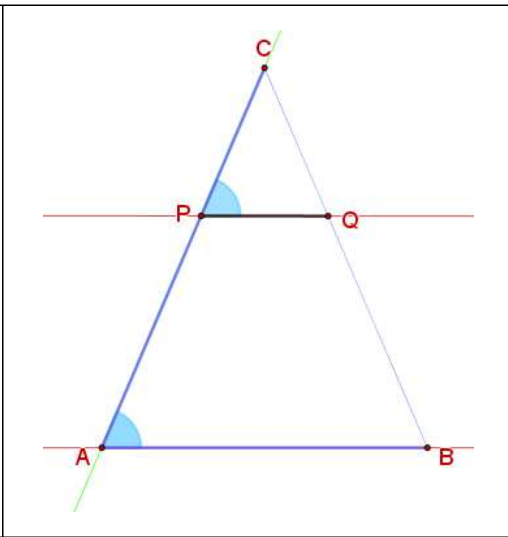


Figura 2

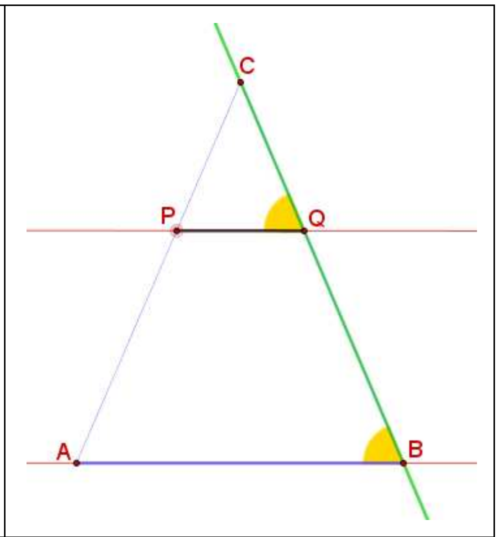


Figura 3

<u>*Dimostrazione*</u>

Per dimostrare che il triangolo PQC è isoscele è sufficiente dimostrare che ha gli angoli alla base congruenti.

1. *Consideriamo quindi le rette parallele AB e PQ tagliate dalla trasversale AC (figura 2) e ricaviamo che:*

   $C\hat{P}Q \cong B\hat{A}C$ *perché angoli corrispondenti.*

2. *Consideriamo poi le rette parallele AB e PQ tagliate dalla trasversale BC (figura 3) e ricaviamo che:*

   $A\hat{B}C \cong C\hat{Q}P$ *perché angoli corrispondenti.*

Pertanto si ha:

$C\hat{P}Q \cong B\hat{A}C$ *dimostrazione 1*

$B\hat{A}C \cong A\hat{B}C$ *perché il triangolo ABC è isoscele sulla base AB*

$A\hat{B}C \cong C\hat{Q}P$ *dimostrazione 2*

$C\hat{P}Q \cong C\hat{Q}P$ *per la proprietà transitiva.*

Si conclude che il triangolo PQC è isoscele sulla base PQ.

Esercizio 12

Dato un triangolo ABC, sia P il punto di intersezione delle bisettrici degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Conduci per il punto P la parallela a BC e indica con D ed E, rispettivamente, i punti di intersezione di tale parallela con i lati AB e AC. Dimostra che $DE \cong BD + EC$.

IPOTESI		*TESI*
$ED \parallel BC$ PB *è la bisettrice di* $\hat{B}$; PC *è la bisettrice di* $\hat{C}$	$\Rightarrow$	$DE \cong EC + BD$

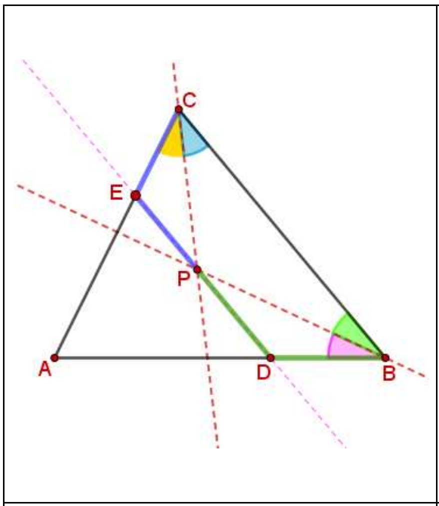


Figura 1

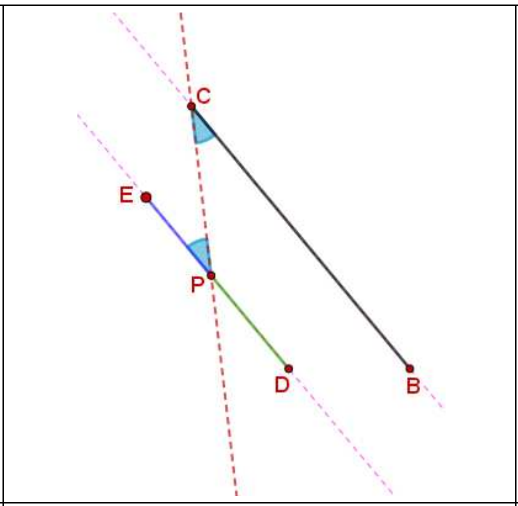


Figura 2

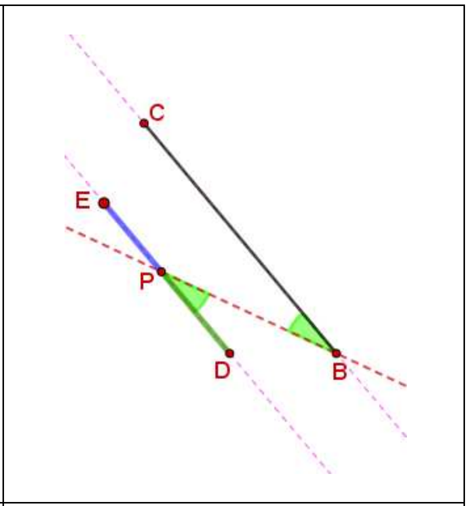


Figura 3

<u>Dimostrazione</u>

Per dimostrare l'asserto, dividiamo il segmento DE nei segmenti PE e PD.

Dimostriamo poi che $PE \cong CE$ *e* $PD \cong BD$.

1. Consideriamo (figura 2), le rette parallele BC e DE tagliate dalla trasversale PC e ricaviamo che:

$E\hat{P}C \cong P\hat{C}B$ *perché angoli alterni interni.*

$P\hat{C}B \cong P\hat{C}E$ *perché PC è la bisettrice di* $\hat{C}$

Si ricava che: $E\hat{P}C \cong P\hat{C}E$ *per la proprietà transitiva.*

Si conclude che il triangolo PCE è isoscele sulla base PC, e quindi $EP \cong EC$.

2. Consideriamo (figura 3), le rette parallele BC e DE tagliate dalla trasversale PB e ricaviamo che:

$D\hat{P}B \cong P\hat{B}C$ *perché angoli alterni interni.*

Ma $P\hat{B}C \cong P\hat{B}D$ *perché PB è la bisettrice di* $\hat{B}$

Si ricava che: $D\hat{P}B \cong P\hat{B}D$ *per la proprietà transitiva.*

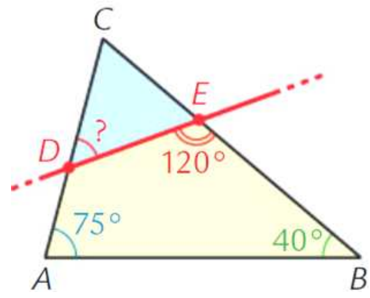
Si conclude che il triangolo PDB è isoscele sulla base PB, e quindi $PD \cong BD$.

Avendo dimostrato che: $EP \cong EC$ *e* $PD \cong BD$

si ha che: $EP + PD \cong EC + BD$ *cioè la tesi:* $DE \cong EC + BD$.

Esercizio 13

Nella figura, quanto vale l'ampiezza dell'angolo $\mathrm{C\widehat{D}E}$?



<u>Soluzione 1</u>

La somma delle ampiezze degli angoli interni di un quadrilatero è 360°.

Pertanto: $A\widehat{D}E = 360° - 75° - 40° - 120° = 125°$.

Gli angoli $C\widehat{D}E$ *e* $A\widehat{D}E$ *sono angoli supplementari.*

Quindi: $C\widehat{D}E = 180° - 125° = 55°$.

<u>Soluzione 2</u>

La somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Pertanto: $D\hat{C}E = 180° - 75° - 40 = 65°$.

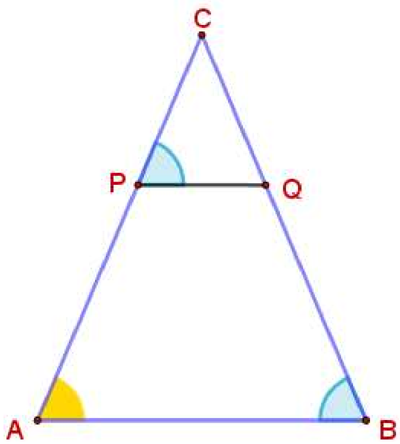
Gli angoli $C\hat{E}D$ *e* $B\hat{E}D$ *sono angoli supplementari.*

Quindi: $C\hat{E}D = 180° - 120° = 60°$.

Si ricava: $C\widehat{D}E = 180° - 60° - 65° = 55°$.

Esercizio 14

Sui lati AC e BC di un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, considera rispettivamente due punti P e Q , tali che $A\hat{B}C \cong C\hat{P}Q$. Dimostra quindi che la retta PQ è parallela alla retta AB.



IPOTESI		*TESI*
ABC è un triangolo isoscele sulla base AB $A\hat{B}C \cong C\hat{P}Q$.	$\Rightarrow$	$PQ \parallel AB$

<u>*Dimostrazione*</u>

Per dimostrare che le due rette sono parallele occorre individuare angoli alterni interni (o esterni) congruenti, o angoli corrispondenti congruenti o angoli coniugati interni (o esterni) supplementari.

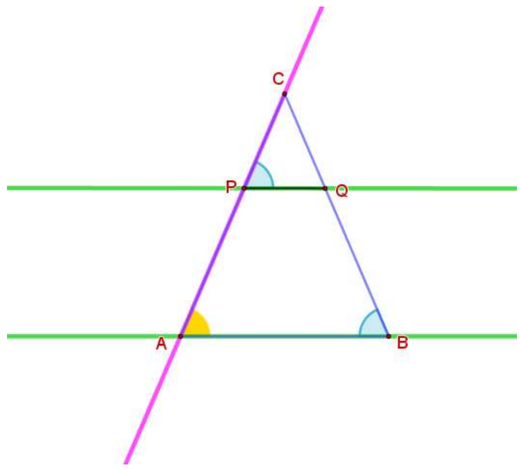
Essendo ABC *un triangolo isoscele sulla base AB, gli angoli alla base sono congruenti:* $B\hat{A}C \cong A\hat{B}C$.

Ma per l'ipotesi n° 2 gli angoli: $A\hat{B}C \cong C\hat{P}Q$.

Per la proprietà transitiva si ha quindi che: $B\hat{A}C \cong C\hat{P}Q$.

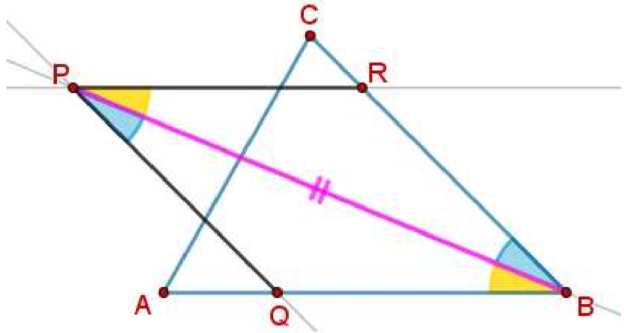
Ma questi ultimi sono angoli corrispondenti fra le rette AB e PQ tagliate dalla trasversale AC.

In base al criterio di parallelismo, si conclude che le rette PQ e AB sono parallele.



Esercizio 15

In un triangolo ABC, sia BP la bisettrice relativa all'angolo $\widehat{B}$. Da P conduci la parallela a BC; chiama Q il punto in cui essa incontra il lato AB. Sempre da P, conduci la parallela ad AB; chiama R il punto in cui essa incontra il lato BC. Dimostra che il triangolo PBQ è congruente al triangolo PBR.



IPOTESI		TESI
ABC *è un triangolo;* BP *è la bisettrice dell'angolo* $\hat{B}$; $PR \parallel AB$; $PQ \parallel BC$.	$\Rightarrow$	$PBQ \cong PBR$

<u>Dimostrazione</u>

I triangoli PBQ e PBR sono congruenti per il 2° C. C. T. Infatti hanno:

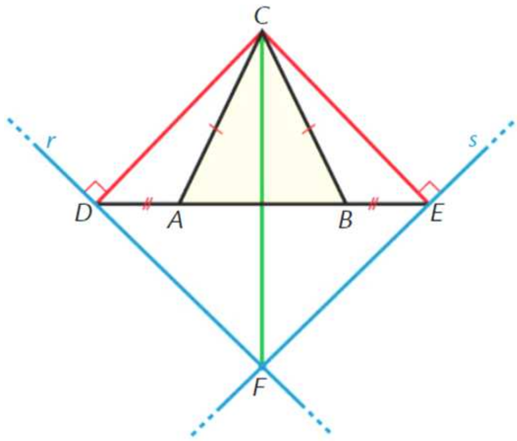
PB *lato in comune ai due triangoli;*

$B\hat{P}R \cong P\hat{B}Q$ *angoli alterni interni fra le rette parallele AB e PR tagliate dalla trasversale BP*

$B\hat{P}Q \cong P\hat{B}R$ *angoli alterni interni fra le rette parallele PQ e BR tagliate dalla trasversale BP*

Esercizio 16

In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, prolunga AB dalla parte di A di un segmento AD e, dalla parte di B, di un segmento BE, in modo che $AD \cong BE$. Conduci da D la retta perpendicolare a CD e da E la retta perpendicolare a CE. Indica con F il punto di intersezione di tali perpendicolari. Dimostra che $DF \cong EF$.



IPOTESI		TESI
ABC *è un triangolo isoscele su base AB;* $AD \cong BE$; $DF \perp CD$; $EF \perp CE$.	$\Rightarrow$	$DF \cong EF$

<u>Dimostrazione</u>

I triangoli ACD e BCE sono congruenti per il 1° Criterio di Congruenza dei Triangoli. Infatti:

$AD \cong BE$ *per ipotesi;*

$AC \cong BC$ *perchè ABC è un triangolo isoscele su base AB;*

$C\hat{A}D \cong C\hat{B}E$ *perché angoli supplementari di angoli congruenti.*

Pertanto i due triangoli ACD e BCE hanno $CD \cong CE$.

I triangoli rettangoli CDF e CEF sono congruenti per il 4° Criterio di Congruenza dei Triangoli Rettangoli. Infatti:

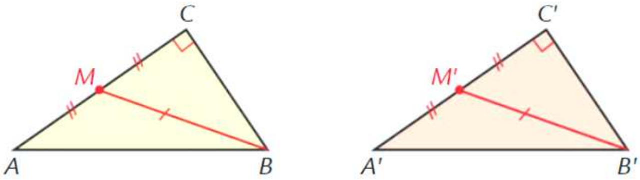
CF *ipotenusa in comune;*

$CD \cong CE$ *per la dimostrazione precedente;*

Pertanto i due triangoli CDF e CEF hanno $DF \cong EF$.

Esercizio 17

Dimostra che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e la mediana a esso relativa.



IPOTESI		*TESI*
$AC \cong A'C'$; $BM \cong B'M'$; $AM \cong CM$; $A'M' \cong C'M'$; $\hat{C} \cong \hat{C}' \cong \frac{\pi}{2}$	$\Rightarrow$	$ABC \cong A'B'C'$

<u>*Dimostrazione*</u>

I triangoli BCM e B'C'M' sono congruenti per il 4° Criterio di Congruenza dei Triangoli Rettangoli. Infatti:

$CM \cong C'M'$ *perché* $CM \cong \frac{1}{2}\, AC \cong \frac{1}{2} A'C' \cong C'M'$ *;*

$BM \cong B'M'$ *per ipotesi.*

Pertanto i due triangoli BCM e B'C'M' hanno $BC \cong B'C'$.

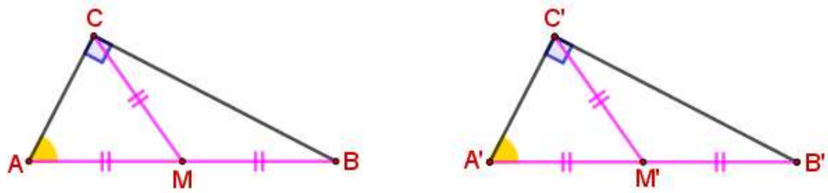
Si conclude che i triangoli ABC e A'B'C' sono congruenti per il 1° Criterio di Congruenza dei Triangoli Rettangoli perché hanno:

$AC \cong A'C'$ *per ipotesi.*

$BC \cong B'C'$ *per la dimostrazione precedente.*

Esercizio 18

Dimostra che due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti la mediana relativa all'ipotenusa e uno degli angoli acuti.



IPOTESI		*TESI*
ABC *è un triangolo rettangolo;* $A'B'C'$ *è un triangolo rettangolo;* $CM \cong C'M'$; $B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$.	$\Rightarrow$	$ABC \cong A'B'C'$

<u>*Dimostrazione*</u>

Innanzitutto ricordiamo che: "La mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo è congruente alla metà dell'ipotenusa stessa".

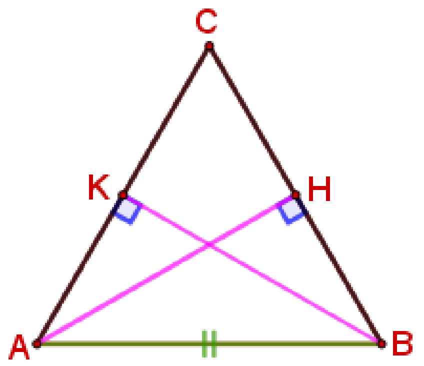
Pertanto, $AB \cong 2\,CM$ *e* $A'B' \cong 2\,C'M'$.

Essendo, per ipotesi, $CM \cong C'M'$ *si ha:* $AB \cong A'B'$.

Per il 3° criterio di congruenza dei triangoli rettangoli, si conclude che: $ABC \cong A'B'C'$.

Esercizio 19

Dimostra che un triangolo in cui le altezze relative ai tre lati sono congruenti è equilatero.



IPOTESI		*TESI*
ABC *è un triangolo;* $AH \cong BK \cong CM$.	$\Rightarrow$	ABC *è un triangolo equilatero .*

<u>Dimostrazione</u>

Consideriamo i triangoli rettangoli ABH e ABK. Essi hanno:

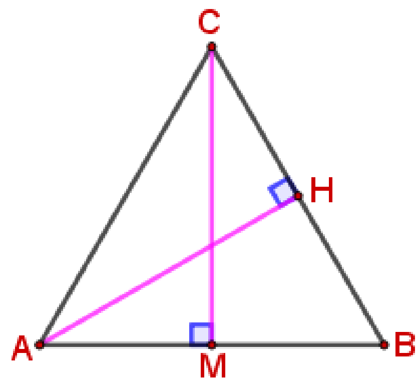
$AH \cong BK$ *per ipotesi;*

AB *lato in comune ai due triangoli.*

Pertanto i triangoli ABH e ABK sono congruenti per il 4° Criterio di Congruenza dei Triangoli Rettangoli.

Pertanto i due triangoli ABH e ABK hanno $A\hat{B}H \cong B\hat{A}K$.

Pertanto il triangolo ABC è isoscele sulla base AB.



Consideriamo i triangoli rettangoli ACM e ACH. Essi hanno:

$AH \cong CM$ *per ipotesi;*

AC *lato in comune ai due triangoli.*

Pertanto i triangoli ACM e ACH sono congruenti per il 4° Criterio di Congruenza dei Triangoli Rettangoli.

Pertanto i due triangoli ACM e ACH hanno $A\hat{C}H \cong C\hat{A}M$.

Pertanto il triangolo ABC è isoscele sulla base AC.

Riassumendo:

$AB \cong BC$ *perché ABC è isoscele sulla base AC*

$BC \cong AC$ *perché ABC è isoscele sulla base AB*

Si conclude che: $AB \cong BC \cong AC$, *cioè che il triangolo ABC è equilatero.*