# TRASFORMAZIONI

Una **trasformazione** (geometrica) è una funzione biunivoca fra i punti del piano.
Un punto si dice **unito** rispetto ad una data trasformazione se il suo corrispondente è se stesso.
Una retta si dice **unita** rispetto ad una data trasformazione se la sua corrispondente è se stessa.
Una figura si dice **unita** rispetto ad una data trasformazione se la sua corrispondente è se stessa.
La trasformazione che associa a ogni punto P del piano il punto P stesso si chiama trasformazione identica o **identità**.
Si dice che una certa proprietà è un **invariante** di una trasformazione se, per ogni figura che gode di quella proprietà, anche la sua corrispondente gode della stessa proprietà.
Poiché una trasformazione è una funzione biunivoca, esiste la sua **inversa** $f^{-1}$, che è ancora una trasformazione.
Una trasformazione si dice **involutoria** se, applicata due volte, coincide con la trasformazione identica.

## AFFINITA'

Un'**affinità** è una corrispondenza biunivoca tra due piani o tra punti dello stesso piano che trasforma rette in rette conservando il parallelismo.

Le equazioni della affinità che trasforma il punto $P(x;y)$ nel punto $P'(x';y')$ sono:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases} \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad det(A) \neq 0$$

**Proprietà**

- Se $det(A) > 0$ si ha un'affinità diretta (conserva il verso di percorrenza).
- Se $det(A) < 0$ si ha un'affinità indiretta (inverte il verso di percorrenza).
- $|det(A)| = \frac{S'}{S}$ = rapporto della affinità.
- Un punto $U$ si dice unito per l'affinità $T$ se è trasformato in se stesso, cioè: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
- Se $T_1$ e $T_2$ sono due affinità, la trasformazione composta $T_1 \circ T_2$ è un'affinità, avente la matrice della trasformazione uguale a: $A_1 \times A_2$ .

**Proprietà invarianti**

| | | |
|---|---|---|
| Punti allineati (rette) | si trasforma in | Punti allineati (rette) |
| Tre punti non allineati (triangoli) | " | Tre punti non allineati (triangoli) |
| Rette parallele (quadrati) | " | Rette parallele (parallelogrammi) |
| Il punto medio $M$ del segmento $AB$ | " | punto medio $M'$ del segmento $A'B'$ |
| Due segmenti congruenti appartenenti a due rette parallele | " | due segmenti congruenti appartenenti a due rette parallele |
| Coniche | " | Coniche |
| Circonferenze | | Ellissi |
| Rette $r$ ed $s$ incidenti in $P(x;y)$ | " | rette $r'$ ed $s'$ incidenti in $P'(x';y')$ |
| Retta $t$ tangente alla conica $C$ | " | retta $t'$ tangente alla conica $C'$ |

Le equazioni della affinità inversa che trasforma il punto $P'(x';y')$ nel punto $P(x;y)$ sono:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{det\,A}x' + \frac{-b}{det\,A}y' + \frac{-d}{det\,A}p + \frac{b}{det\,A}q \\ y = \frac{-c}{det\,A}x' + \frac{a}{det\,A}y' + \frac{c}{det\,A}p + \frac{-a}{det\,A}q \end{cases}$$

$$\text{con} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{det\,A} & \frac{-b}{det\,A} \\ \frac{-c}{det\,A} & \frac{a}{det\,A} \end{pmatrix} \qquad det\,A^{-1} = \frac{1}{det\,A} \neq 0$$

## ISOMETRIE

Un'**isometria** è una trasformazione dei punti del piano che conserva le distanze.

Un'isometria trasforma:

- Tre punti allineati in tre punti allineati
- un segmento in un segmento ad esso congruente
- rette in rette
- rette parallele in rette parallele
- rette incidenti in rette incidenti
- un angolo in un angolo ad esso congruente

Le equazioni dell'isometria diretta : $\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad det(A) = a^2 + b^2 = 1$

Le equazioni della isometria indiretta : $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = bx - ay + q \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e $det(A) = -a^2 - b^2 = -1$

L'identità, la traslazione, la rotazione e la simmetria centrale sono isometrie dirette

La simmetria assiale è una isometria indiretta (l'orientamento dei vertici di un poligono viene invertito).

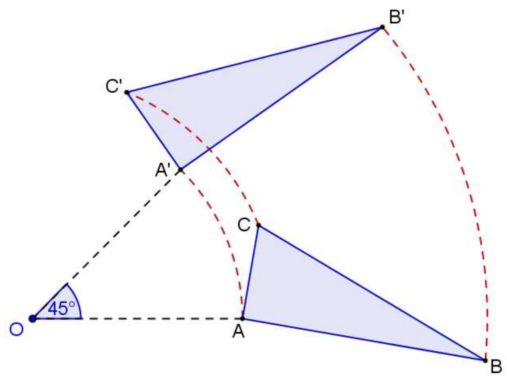
L'**identità** è un'isometria che trasforma la figura $T$ in se stessa. Essa ha tutti i punti uniti.

Le equazioni dell'identità sono : $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

### ROTAZIONE

Una **rotazione** di centro O e angolo orientato $\alpha$ è un'isometria che associa a ogni punto P del piano il punto P' tale che soddisfa le seguenti condizioni:

- l'angolo $P\hat{O}P'$ , orientato in modo che OP sia il primo lato, ha la stessa ampiezza e lo stesso orientamento di $\alpha$
- $OP' \cong OP$




Se l'angolo è positivo la rotazione avviene in senso antiorario.
Se l'angolo è negativo la rotazione avviene in senso orario.

Le proprietà invarianti di una traslazione sono quelle definite nell'isometria.

Le Rotazioni conservano inoltre:

- l'orientamento delle figure.

Le Rotazioni non conservano le direzioni (una retta non viene trasformata in una retta parallela)

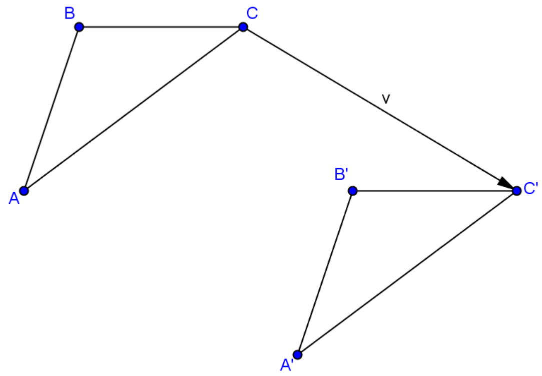
L'unico punto unito di una rotazione (diversa dalla identità) è il centro di rotazione. Non esiste nessuna retta è unita rispetto ad una rotazione (a meno che non si tratti dell'identità).

Le equazioni della ***rotazione*** di centro l'origine sono: $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,sen\,\alpha \\ y' = x\,sen\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ con $det\,A = det \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1$

Le equazioni della ***rotazione inversa*** di centro l'origine sono: $\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\,sen\,\alpha \\ y = -x'\,sen\,\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ con $det\,A = det \begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\,\alpha \\ -sen\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = 1$

Le equazioni della ***rotazione*** di centro $O(p;q)$ sono: $\begin{cases} x' = (x-p)\cdot\cos\alpha - (y-q)\cdot\sin\alpha + p \\ y' = (x-p)\cdot\sin\alpha + (y-q)\cdot\cos\alpha + q \end{cases}$

## TRASLAZIONE




Una **traslazione** di vettore $\vec{v}$ è un'isometria che associa a ogni punto P del piano il punto P' tale che $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ .

Le proprietà invarianti di una traslazione sono quelle definite nell'isometria.

Le traslazioni conservano inoltre:

- le direzioni (una retta viene trasformata in una retta parallela)
- l'orientamento delle figure.

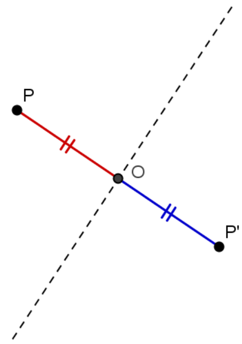
Nessun punto del piano risulta un punto unito rispetto ad una traslazione (diversa dalla trasformazione identica).

Tutte le rette che hanno la direzione del vettore $\vec{v}$ sono rette unite. Però tali rette non sono formate da punti uniti.

La traslazione non ha punti uniti.

Le equazioni della traslazione sono : $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

## SIMMETRIA ASSIALE




Una **simmetria assiale** rispetto ad una retta r è un'isometria che associa a ogni punto P del piano il punto P', simmetrico di P rispetto alla retta r.

Le proprietà invarianti di una simmetria assiali sono quelle definite nell'isometria.

Le simmetrie assiali non conservano invece le direzioni e l'orientamento delle figure.

Tutti e soli i punti appartenenti all'asse di simmetria sono uniti.

L'asse di simmetria è una retta unita.

Tutte le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono unite. I suoi punti non sono punti uniti.

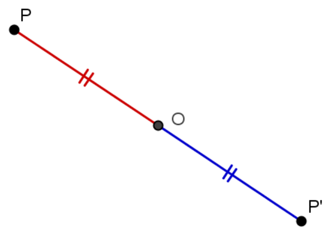
Le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = mx + q$ sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}x + \dfrac{2m}{1+m^2}y - \dfrac{2mq}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{2m}{1+m^2}x - \dfrac{1-m^2}{1+m^2}y + \dfrac{2q}{1+m^2} \end{cases} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} \dfrac{1-m^2}{1+m^2} & \dfrac{2m}{1+m^2} \\ \dfrac{2m}{1+m^2} & -\dfrac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix} \quad \det A = -1$$

## SIMMETRIE ASSIALI NOTEVOLI

| **Simmetria rispetto all'asse x** | **Simmetria rispetto all'asse y** | **Simmetria rispetto alla bisettrice** $y = x$ | **Simmetria rispetto alla bisettrice** $y = -x$ |
|---|---|---|---|
| $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$ |
| **Simmetria rispetto alla retta** $y = q$ | **Simmetria rispetto alla retta** $x = p$ | **Simmetria rispetto al punto** $C(p;q)$ | **Simmetria rispetto all'origine** $O(0;0)$ |
| $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 2q \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x + 2p \\ y' = y \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x + 2p \\ y' = -y + 2q \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$ |

## SIMMETRIA CENTRALE




Una **simmetria centrale** di centro O è un'isometria che associa a ogni punto P del piano il punto P', simmetrico di P rispetto al punto O.

Le proprietà invarianti di una simmetria centrale sono quelle definite nell'isometria.

Le simmetrie centrali conservano inoltre:

- le direzioni (una retta viene trasformata in una retta parallela)
- l'orientamento delle figure.

L'unico punto unito è il centro di simmetria.

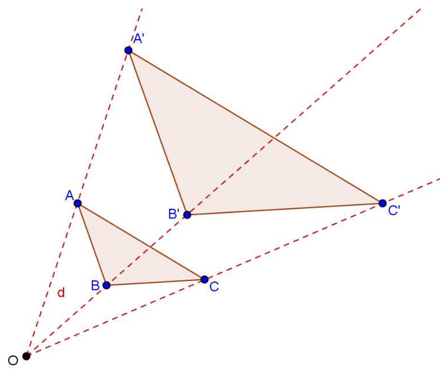
Tutte le rette passanti per il centro di simmetria sono unite. Pero tali rette non sono formate da punti uniti.

| Le equazioni della simmetria centrale : | $\begin{cases} x' = -x + 2x_C \\ y' = -y + 2y_C \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $det\,(A) = 1$ |
|---|---|

***Osservazioni***

| Se nell'equazione $f(x,y)=0$ : | |
|---|---|
| la variabile x compare solo con grado pari, la curva è simmetrica rispetto all'asse y. | $2x^2 - y + 1 = 0$ |
| la variabile y compare solo con grado pari, la curva è simmetrica rispetto all'asse x. | $x - 2y^2 + 1 = 0$ |
| Tutti i termini sono di grado pari, la curva è simmetrica rispetto all'origine . | $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$ |
| Tutti termini sono di grado dispari e manca il termine noto, la curva è simmetrica rispetto all'origine . | $x^3 - y = 0$ |

## OMOTETIE



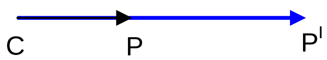

Un'**omotetia** di centro C e rapporto k $(k \in R^0)$ è una trasformazione dei punti del piano che *(lascia fisso il punto C)* trasforma un punto P nel punto P' in modo che C, P e P' sono allineati e $\frac{\overline{P'C}}{\overline{PC}} = |k|$.

- se $k > 0$ $\quad P' \in OP$
- se $k < 0$ $\quad P'$ appartiene alla semiretta opposta a OP

Le equazioni dell'omotetia sono: $\begin{cases} x^I = a\,x + p \\ y^I = a\,y + q \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $\quad det\,(A) = a^2$

É una affinità diretta con $r.a. = a^2$. É una similitudine con $r.s. = |a|$

L'inversa di una omotetia di centro $C$ e rapporto $k$, è una omotetia di centro $C$ e rapporto $\frac{1}{k}$.

| | |
|---|---|
| $\forall k \neq 0$ | Ogni omotetia è una similitudine diretta. |
| Se $k > 0$ i punti $P$ e $P^I$ sono dalla stessa parte rispetto a $C$ . |  |
| Se $k < 0$ i punti $P$ e $P^I$ sono da parte opposta rispetto a $C$ . |  |
| Se $\|k\| > 1$ | Dilatazione |
| Se $\|k\| < 1$ | Contrazione |
| Se $k \neq 1$ | L'unico punto unito è il centro C. Ogni retta passante per C è una retta unita. |
| Se $k = 1$ | Identità. Tutti i punti del piano sono uniti. |
| Se $k = -1$ | Simmetria centrale di centro C. |

**Proprietà**

- Una omotetia trasforma un segmento $AB$ nel segmento $A^I B^I$ ad esso parallelo (equiverso se $k>0$, di verso opposto se $k<0$) e tale che $A^I B^I = |K| \cdot AB$
- una retta in un'altra a essa parallela
- un angolo in un angolo a esso congruente
- La composizione di una omotetia con una isometria è una similitudine.
- La composizione di due omotetie aventi lo stesso centro $C$ e rapporti $k_1$ e $k_2$, è una omotetia avente centro in $C$ e rapporto $k = k_1 \cdot k_2$ (tale composizione è commutativa).
- $|det(A)| = k^2 = \frac{S^I}{S}$ rapporto di affinità ( $S$ e $S^I$ superfici delle figure omotetiche).
- $k = \frac{p^I}{p}$ = rapporto di omotetia ( $p$ e $p^I$ perimetri delle figure omotetiche).

Le invarianti di un'omotetia sono:

- le direzioni
- l'allineamento dei punti
- l'ampiezza degli angoli
- il rapporto tra i segmenti

## SIMILITUDINE

Una similitudine è una affinità tra i punti del piano che mantiene costante il rapporto tra segmenti corrispondenti, cioè tale che: $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = k$, dove $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ è detto rapporto di similitudine.

| | |
|---|---|
| Le equazioni della similitudine diretta : | $\begin{cases} x^I = ax - by + p \\ y^I = bx + ay + q \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e $det(A) = a^2 + b^2 > 0$ |
| Le equazioni della similitudine indiretta : | $\begin{cases} x^I = ax + by + p \\ y^I = bx - ay + q \end{cases}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ e $det(A) = -a^2 - b^2 < 0$ |

Una similitudine è la composizione di una omotetia e di un'isometria (o viceversa).

Una similitudine, oltre alle proprietà delle affinità, trasforma:

- rette perpendicolari in rette perpendicolari
- circonferenze in circonferenze
- triangoli in triangoli simili
- poligoni in poligoni simili
- $|det(A)| = k^2 = \frac{S^I}{S}$ = rapporto di affinità ( $S$ e $S^I$ superfici delle figure omotetiche)
- $k = \frac{p^I}{p}$ = rapporto di similitudine ( $p$ e $p^I$ perimetri delle figure omotetiche).