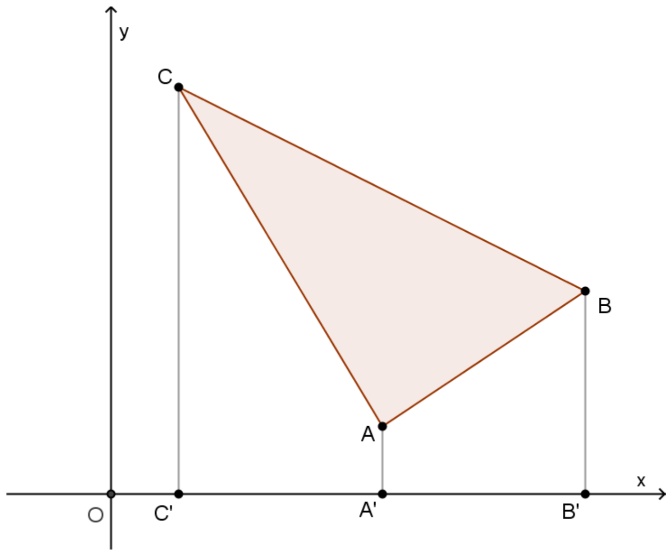
Area del triangolo



L'area del triangolo ABC è data da:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

<u>*Dimostrazione*</u>

L'area del triangolo ABC è data dalla differenza fra le aree del trapezio $\mathrm{BCC^IB^I}$ e dei trapezi ACC^IA^I e BAA^IB^I.

In simboli: $S_{ABC} = S_{BCC^IB^I} - S_{ACC^IA^I} - S_{BAA^IB^I}$

L'area del trapezio $\mathrm{BCC^IB^I}$ è data da: $\mathrm{S_{BCC^IB^I}} = \frac{\overline{BB^I}+\overline{CC^I}}{2} \cdot \overline{B^IC^I} = \frac{y_B+y_C}{2} \cdot (x_B - x_C)$

L'area del trapezio ACC^IA^I è data da: $\mathrm{S}_{ACC^IA^I} = \frac{\overline{AA^I}+\overline{CC^I}}{2} \cdot \overline{A^IC^I} = \frac{y_A+y_C}{2} \cdot (x_A - x_C)$

L'area del trapezio BAA^IB^I è data da: $\mathrm{S}_{BAA^IB^I} = \frac{\overline{BB^I}+\overline{AA^I}}{2} \cdot \overline{B^IA^I} = \frac{y_B+y_A}{2} \cdot (x_B - x_A)$

Pertanto l'area del triangolo ABC è data da:

$$S_{ABC} = S_{BCC^IB^I} - S_{ACC^IA^I} - S_{BAA^IB^I} = \frac{y_B + y_C}{2} \cdot (x_B - x_C) - \frac{y_A + y_C}{2} \cdot (x_A - x_C) - \frac{y_B + y_A}{2} \cdot (x_B - x_A) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\, (y_B + y_C) \cdot (x_B - x_C) - (y_A + y_C)(x_A - x_C) - (y_B + y_A) \cdot (x_B - x_A)\,] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\, \cancel{x_B y_B} - x_C y_B + x_B y_C - \cancel{x_C y_C} - \cancel{x_A y_A} + x_C y_A - x_A y_C + \cancel{x_C y_C} - \cancel{x_B y_B} + x_A y_B - x_B y_A + \cancel{x_A y_A}\,] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot [\, x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_c - x_B y_A \,] = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

Nota

Affinché il valore dell'area esca positiva occorre prendere i punti A, B, C, in senso antiorario, così come in figura.