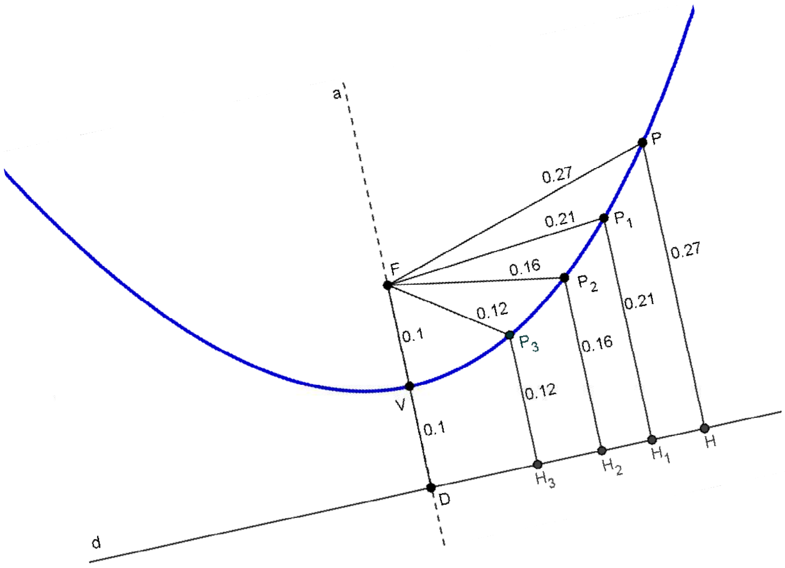
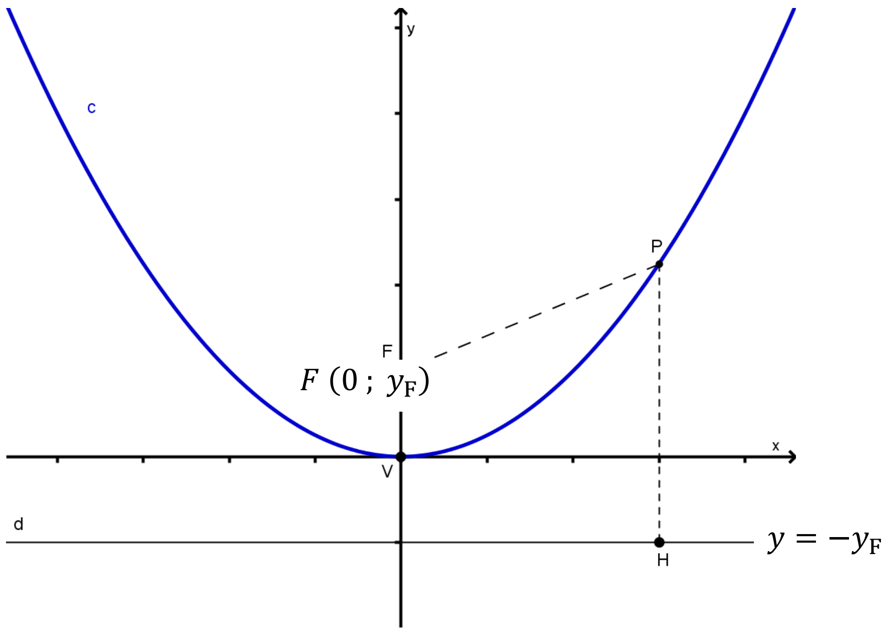
La Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso **F**, detto fuoco, e da una retta fissa **d**, detta direttrice.



Parabola con il vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y

Consideriamo una parabola con il vertice nell'origine degli assi cartesiani e con il fuoco in $F(0\,;\,y_F)$



Dalla definizione di parabola come luogo geometrico si ha : $\overline{PF} = \overline{PH}$.

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-y_F)^2} = |y + y_F|$ $\quad$ $(x-0)^2 + (y-y_F)^2 = (y+y_F)^2$

$x^2 + y^2 + {y_F}^2 - 2y_F y = y^2 + {y_F}^2 + 2y_F y$ $\quad$ $4y_F y = x^2$

$y = \frac{1}{4y_F}x^2$ $\quad$ *Ponendo* $\frac{1}{4y_F} = a$ $\quad$ *si ottiene*:

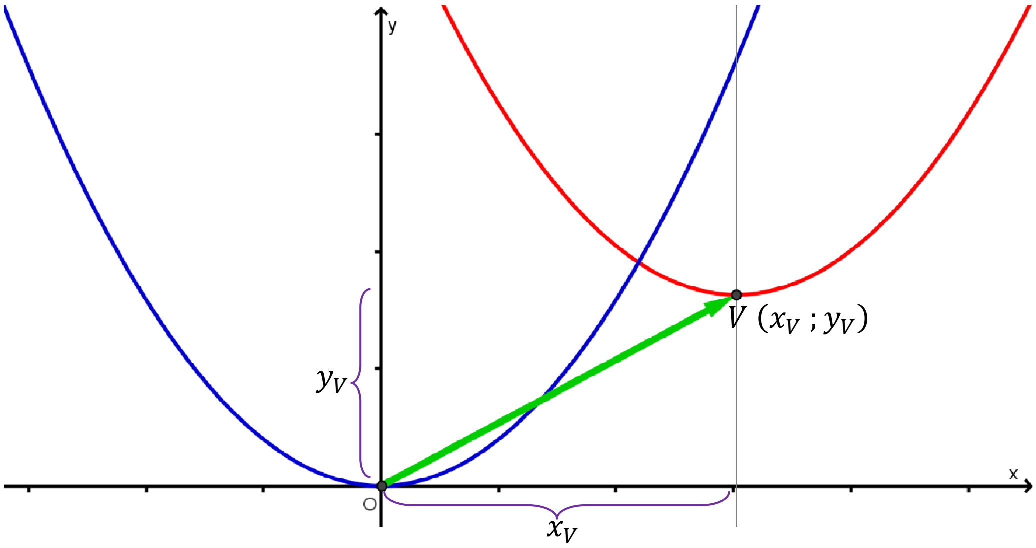
$y = ax^2$	$V(0\,;\,0)$	$F\left(0\,;\,\frac{1}{4a}\right)$	$asse \quad x = 0$	$direttrice \quad y = -\frac{1}{4a}$

Infatti dalla relazione $\frac{1}{4y_F} = a$ *si ottiene:* $y_F = \frac{1}{4a}$.

Parabola con asse parallelo all'asse y *(dimostrazione 1)*

Consideriamo la parabola $y = a\,x^2$ *con il vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse* y.
Trasliamo la parabola portando il vertice nel punto $V(x_V\,;\,y_V)$.

Le equazioni della traslazione sono : $\begin{cases} x' = x + x_V \\ y' = y + y_V \end{cases}$



Sostituendo le equazioni inverse: $\begin{cases} x = x' - x_V \\ y = y' - y_V \end{cases}$ *nell'equazione della parabola* $y = a\,x^2$ *si ottiene*

l'equazione della parabola con vertice nel punto $V\,(x_V\,;\,y_V)$.

$y' - y_V = a\,(x' - x_V)^2\,;$ $\quad y' - y_V = a\left(x'^2 + x_V{}^2 - 2x_V x'\right);$ $\quad y' = ax'^2 - 2ax_V x' + ax_V{}^2 + y_V$

Ponendo: $\begin{cases} b = -2ax_V \\ c = ax_V{}^2 + y_V \end{cases}$ *si ottiene l'equazione :* $y' = ax'^2 + bx' + c$.

Dalla relazione: $b = -2ax_V$ *si ricava :* $x_V = -\dfrac{b}{2a}$

Essendo il fuoco e il vertice appartenenti entrambi all'asse risulta : $x_F = -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad asse \quad x = -\dfrac{b}{2a}$

Dalla relazione: $c = ax_V{}^2 + y_V$ *si ha:*

$$\boldsymbol{y_V} = -ax_V{}^2 + c = -a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c = -a\frac{b^2}{4a^2} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{\Delta}{4a}$$

Dall'equazione della traslazione $y' = y + y_V$ *si ha:*

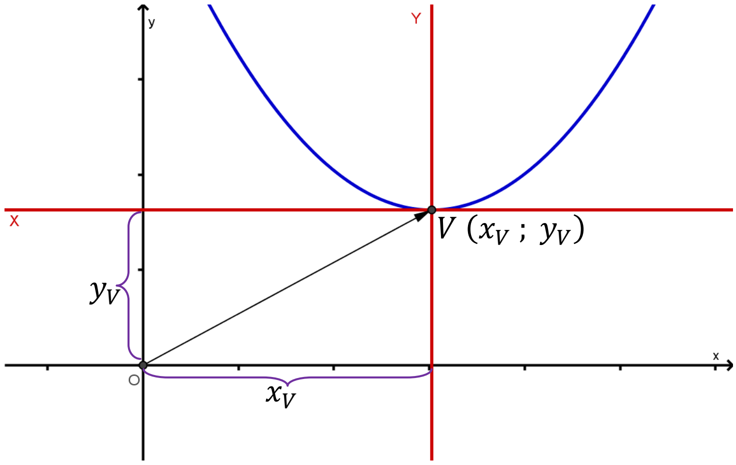
$$y'_F = y_F + y_V = \frac{1}{4a} + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = \frac{1-\Delta}{4a}$$

$$y'_d = y_d + y_V = -\frac{1}{4a} + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Riassumendo : $y = ax^2 + bx + c$ *è l'equazione di una parabola con :*	$V\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$	$asse\colon\ \ x = -\dfrac{b}{2a}$
	$F\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,\dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$	$direttrice\colon\ \ y = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$

Parabola con asse parallelo all'asse y *(dimostrazione 2)*

Consideriamo nel sistema di riferimento Oxy *una parabola con il vertice nel punto* $V\ (x_V\ ;\ y_V)$ *e con asse di simmetria parallelo all'asse y .*



La parabola, nel sistema di riferimento VXY *con l'origine coincidente con il vertice V della parabola e gli assi paralleli ed equiversi ai vecchi assi, ha equazione:* $\boldsymbol{Y = a\, X^2}$

$con \quad V(0\,;0) \qquad F\left(0\,;\,\frac{1}{4a}\right) \qquad direttrice\colon\ Y = -\frac{1}{4a} \qquad asse\colon\ X = 0$

Per trovare l'equazione della parabola nel vecchio sistema di riferimento Oxy *operiamo una traslazione di assi di equazione:* $\begin{cases} X = x - x_V \\ Y = y - y_V \end{cases}$

$y - y_V = a\,(x - x_V)^2 \qquad\qquad y - y_V = a(x^2 + {x_V}^2 - 2x_V x)$

$y = ax^2 - 2ax_V x + a{x_V}^2 + y_V$

Ponendo: $\begin{cases} b = -2ax_V \\ c = a{x_V}^2 + y_V \end{cases}$ *si ottiene l'equazione :* $y = ax^2 + bx + c$ *.*

$y = ax^2 + bx + c$ *è l' equazione di una parabola con :*	$V\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$	$asse\colon\ x = -\frac{b}{2a}$
	$F\left(-\frac{b}{2a}\,;\,\frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$direttrice\colon\ y = -\frac{1+\Delta}{4a}$

Infatti, dalla relazione: $b = -2ax_V$ *si ricava:*

$x_V = -\frac{b}{2a} \qquad x_F = -\frac{b}{2a} \qquad asse \quad x = -\frac{b}{2a}$

Dalla relazione: $c = a{x_V}^2 + y_V$ *si ricava:* $\boldsymbol{y_V} = -a{x_V}^2 + c = -a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + c = -a\frac{b^2}{4a^2} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = -\frac{\Delta}{\boldsymbol{4a}}$

Dall'equazione della traslazione $Y = y - y_V$ *si ha:* $y = Y + y_V$ *dalla quale si ottiene:*

$y_F = Y_F + y_V = \frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = \frac{1-\Delta}{4a}$

$y_d = Y_d + y_V = -\frac{1}{4a} - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1+\Delta}{4a}$

La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice.

Siano: $F\,(x_F\,;\,y_F)$ *il fuoco,* $y = d$ *la direttrice e* $P\,(x;\,y)$ *un punto della parabola.*

Dalla definizione si ha: $\overline{PF} = \overline{PH}$.

$$\sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2} = |y-d|\,;$$

$$(x-x_F)^2+(y-y_F)^2 = (y-d)^2\,;$$

$$x^2-2x_Fx+x_F^{\,2}+y^2+y_F^{\,2}-2y_Fy = y^2-2dy+d^2\,;$$

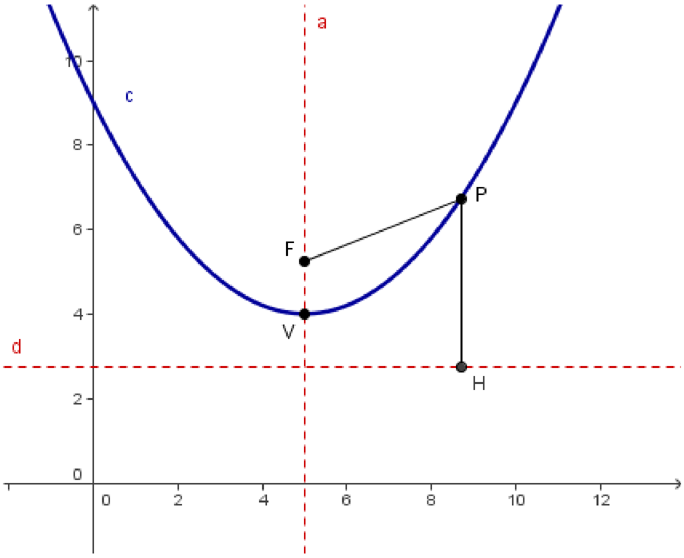
$$x^2-2x_Fx+x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-2y_Fy = d^2-2dy\,;$$

$$2dy-2y_Fy = -x^2+2x_Fx-x_F^{\,2}-y_F^{\,2}+d^2\,;$$

$$2y_Fy-2dy = x^2-2x_Fx+x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2\,;$$

$$2(y_F-d)\cdot y = x^2-2x_Fx+x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2\,;$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2(y_F-d)}x^2-\frac{x_F}{y_F-d}x+\frac{x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2}{2(y_F-d)}}$$



Ponendo: $\begin{cases} \dfrac{1}{2(y_F-d)} = a \\ -\dfrac{x_F}{y_F-d} = b \\ \dfrac{x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2}{2(y_F-d)} = c \end{cases}$ *si ottiene:* $y = ax^2+bx+c$ *con*

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$
$$F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$$
$$d:\ \ y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$
$$a:\ \ x = -\frac{b}{2a}$$

Infatti, ricavando le formule inverse si ha:

$$\begin{cases} y_F-d = \dfrac{1}{2a} \\ - \\ - \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{x_F}{\dfrac{1}{2a}} = b \\ \dfrac{x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2}{2\cdot\dfrac{1}{2a}} = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ \dfrac{x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2}{\dfrac{1}{a}} = c \end{cases} \qquad \begin{cases} x_F = -\dfrac{b}{2a} \\ x_F^{\,2}+y_F^{\,2}-d^2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

sostituendo x_F *nella II*ª

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+y_F^{\,2}-d^2 = \frac{c}{a}; \qquad y_F^{\,2}-d^2 = -\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}; \qquad y_F^{\,2}-d^2 = \frac{-b^2+4ac}{4a^2}; \qquad y_F^{\,2}-d^2 = -\frac{\Delta}{4a^2};$$

$$(y_F+d)\cdot(y_F-d) = -\frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{ma} \quad y_F-d = \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_F-d = \dfrac{1}{2a} \\ (y_F+d)\cdot\dfrac{1}{2a} = -\dfrac{\Delta}{4a^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_F-d = \dfrac{1}{2a} \\ y_F+d = -\dfrac{\Delta}{2a} \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha: $2y_F = \dfrac{1}{2a}-\dfrac{\Delta}{2a}$; $y_F = \dfrac{1-\Delta}{4a}$

Sottraendo membro a membro si ha: $2d = -\dfrac{\Delta}{2a}-\dfrac{1}{2a}$; $d = -\dfrac{1+\Delta}{4a}$

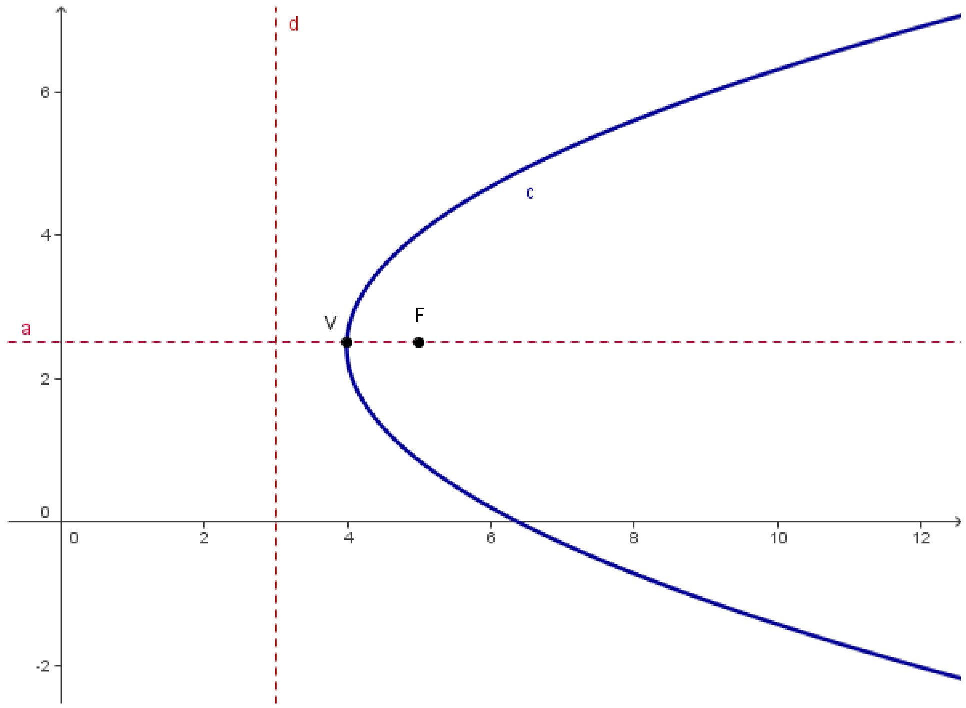
L'ascissa del vertice è uguale all'ascissa del fuoco.

L'ordinata del vertice è: $y_V = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\dfrac{b}{2a}\right)+c = \dfrac{b^2}{4a}-\dfrac{b^2}{2a}+c = \dfrac{b^2-2b^2+4ac}{4a} = \dfrac{-b^2+4ac}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

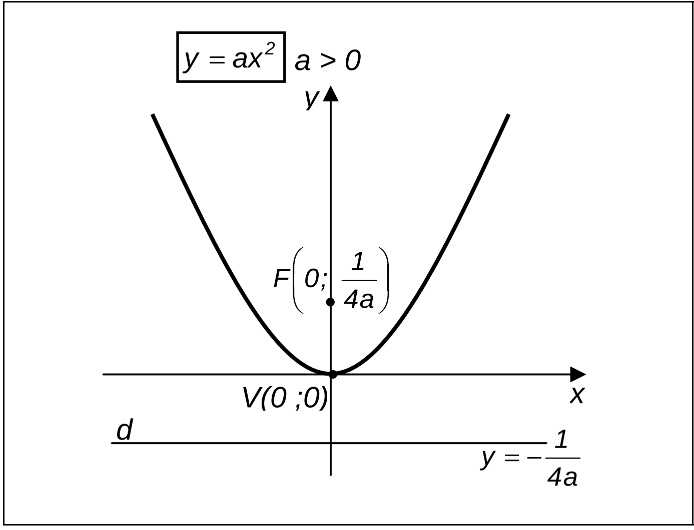
Parabola con asse parallelo all'asse x

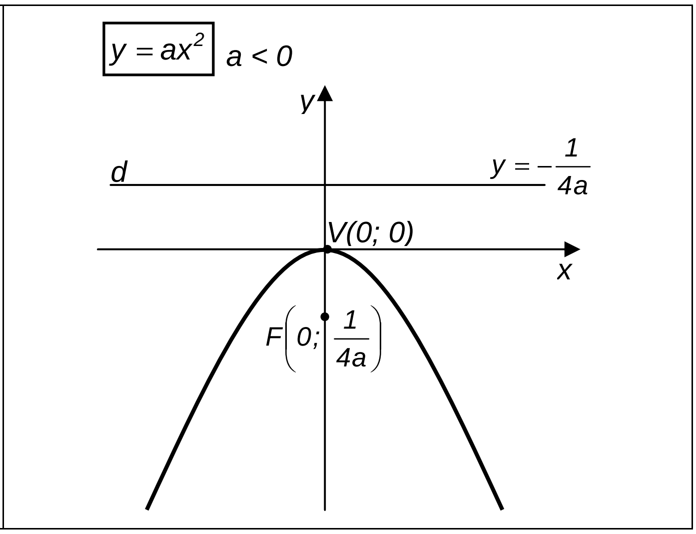
Con procedimento analogo seguito per la parabola con asse parallelo all'asse *y* si ottiene l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse *x.*

$$x = ay^2 + by + c \qquad \text{con} \qquad \begin{array}{l} V\left(-\dfrac{\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right) \\ F\left(\dfrac{1-\Delta}{4a}; -\dfrac{b}{2a}\right) \\ d: \quad x = -\dfrac{1+\Delta}{4a} \\ a: \quad y = -\dfrac{b}{2a} \end{array}$$



Parabola con il vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse y





Parabola con il vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse x