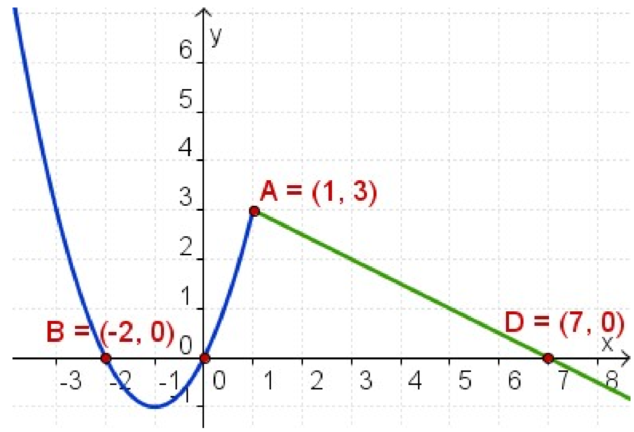
SIMULAZIONE PROVA SCRITTA

Retta e Parabola

Esercizio 1

In figura è rappresentato il grafico di una funzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & se\ \ x < 1 \\ mx + q & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$$



1. Trova i valori di a, b, m, q.
2. Disegna il grafico della funzione: $y = |\,f(x)\,|$
3. Disegna il grafico della funzione: $y = f(\,|x|\,)$

<u>*Soluzione*</u>

La funzione $y = ax^2 + bx$ *è una parabola con asse parallelo all'asse delle* y *e passante per l'origine.*
Per determinare la sua equazione imponiamo il passaggio per i punti A *e* B *.*

$$\begin{cases} 3 = a(1)^2 + b \cdot 1 \\ 0 = a(-2)^2 + b \cdot (-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = a + b \\ 0 = 4a - 2b \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 3 - a \\ 4a - 2(3 - a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \\ 4a - 6 + 2a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ 6a = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

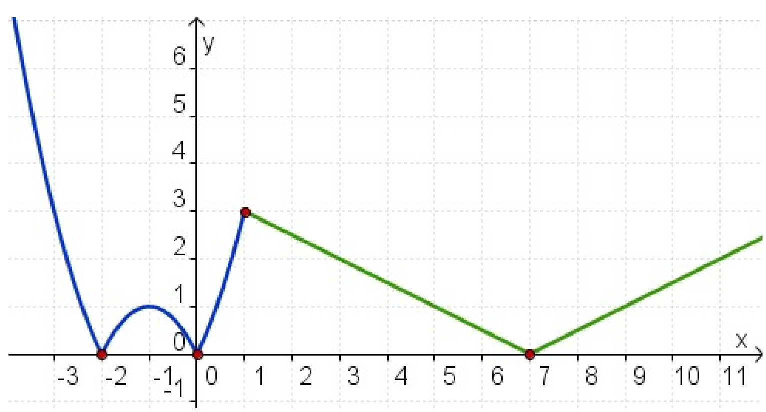
La funzione $y = mx + q$ *è una retta.*
Per determinare la sua equazione imponiamo il passaggio per i punti A *e* D *.*

$$\begin{cases} 3 = m \cdot 1 + q \\ 0 = m \cdot 7 + q \end{cases} \qquad \begin{cases} 6m = -3 \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} m = -\dfrac{1}{2} \\ q = 3 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Pertanto la funzione è $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & se\ \ x < 1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{7}{2} & se\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

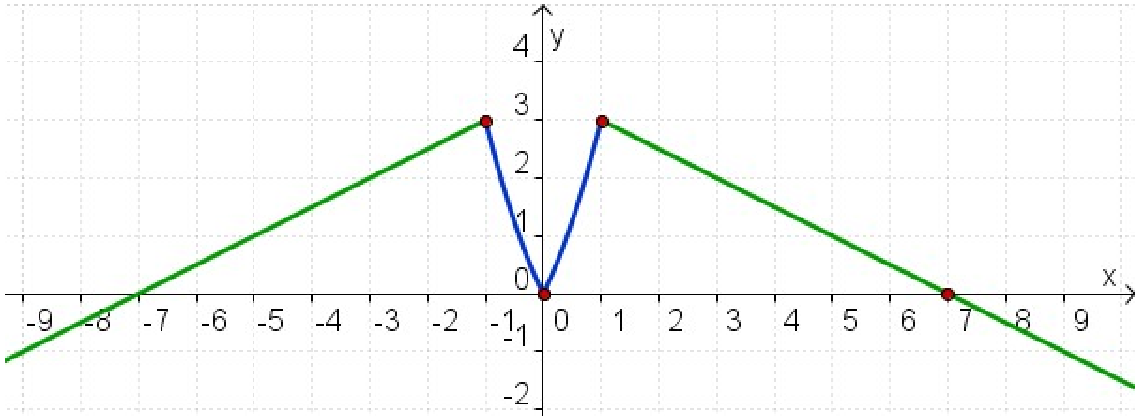
$$y = |f(x)| = \begin{cases} +f(x) & se\ \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se\ \ f(x) < 0 \end{cases}$$

In altri termini, il grafico della funzione $y = |f(x)|$ *si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse delle* x*, i rami del grafico che si trovano nel semipiano negativo delle* y*.*

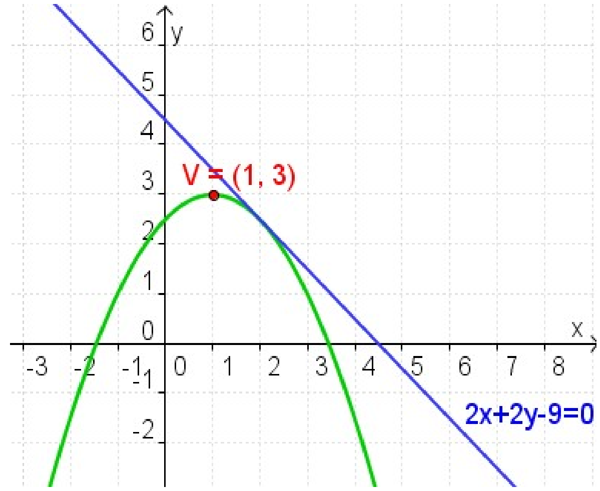


La funzione $y = f(|x|) = \begin{cases} f(+x) & se\ \ x \geq 0 \\ \\ f(-x) & se\ \ < 0 \end{cases}$

In altri termini, il grafico della funzione $y = f(|x|)$ *si ottiene simmetrizzando, rispetto all'asse delle* y*, il ramo del grafico che si trova nel semipiano positivo delle* x.



Esercizio 2



Scrivi l'equazione della parabola γ nella figura di vertice V e tangente alla retta t di equazione $2x+2y-9=0$.

a. Verifica che il punto di tangenza tra t e γ, il fuoco di γ e il punto d'intersezione tra γ e l'asse y sono allineati.

b. Determina l'equazione della retta r parallela a t in modo che intercetti su γ una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

c. Nella parte di piano compresa fra γ e l'asse x, inscrivi un quadrato avente un lato sull'asse x.

Soluzione

La parabola γ della figura ha l'asse di simmetria parallelo all'asse y , pertanto la sua equazione è del tipo:

$y=ax^2+bx+c$

Sfruttiamo la conoscenza delle coordinate del vertice.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=1 \\ 3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-2a \\ 3=a-2a+c \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-2a \\ c=a+3 \end{cases}$$

Otteniamo il fascio di parabole di equazione: $y=ax^2-2ax+a+3$.

Per determinare l'equazione di γ sfruttiamo la tangenza della retta t.

$$\begin{cases} y=ax^2-2ax+a+3 \\ 2x+2y-9=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=ax^2-2ax+a+3 \\ y=-x+\dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+\dfrac{9}{2}=ax^2-2ax+a+3 \\ \text{— — —} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^2+(1-2a)x+a-\dfrac{3}{2}=0 \\ \text{— — —} \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza.

$$\Delta=0\,; \qquad b^2-4ac=0\,; \qquad (1-2a)^2-4\cdot a\cdot\left(a-\frac{3}{2}\right)=0\,; \qquad 1+4a^2-4a-4a^2+6a=0\,;$$

$$2a=-1\,; \qquad a=-\frac{1}{2}.$$

Pertanto l'equazione di γ è $\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2}}$ **.**

Soluzione a

Determiniamo le coordinate del punto di tangenza tra t e γ.

$$\begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{5}{2} \\ y=-x+\dfrac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -x+\dfrac{9}{2}=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{5}{2} \\ \text{— — —} \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+9=-x^2+2x+5 \\ \text{— — —} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x+9-2x-5=0 \\ \text{— — —} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ \text{— — —} \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)^2=0 \\ \text{— — —} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2}=2 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad T\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$$

Determiniamo le coordinate del punto d'intersezione tra γ e l'asse y .

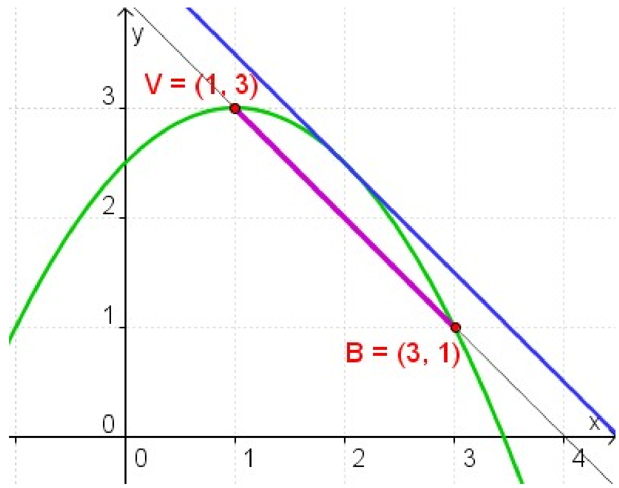
$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{5}{2} \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{5}{2} \\ x=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad A\left(0\,;\frac{5}{2}\right)$$

L'ascissa del fuoco è $x_V = 1$.

L'ordinata del fuoco è $y_V = \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-\left(1^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}\right)}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-(1+5)}{-2} = \frac{5}{2}$.

Pertanto le coordinate del fuoco sono: $F\left(1\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

I tre punti $F\left(1\ ;\ \frac{5}{2}\right)$, $T\left(2\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ *e* $A\left(0\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ *appartengono alla retta orizzontale* $y = \frac{5}{2}$ *, pertanto sono allineati.*



<u>*Soluzione b*</u>

La generica retta parallela alla retta tangente t ha equazione: $y = -x + q$

Determiniamo le coordinate dei punti di intersezione della parabola con tale retta.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \\ y = -x + q \end{cases} \qquad \begin{cases} -x + q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + q - \frac{5}{2} = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 2q - 5 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-(2q-5)} \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9-2q} \\ --- \end{cases}$$

I punti di intersezione hanno coordinate:

$$P\left(-2-\sqrt{9-2q}\ ;\ 2+q+\sqrt{9-2q}\right)$$

$$Q\left(-2+\sqrt{9-2q}\ ;\ 2+q-\sqrt{9-2q}\right)$$

Imponiamo che la lunghezza della corda sia $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ *;*

$$\sqrt{\left[-2-\sqrt{9-2q}-\left(-2+\sqrt{9-2q}\right)\right]^2 + \left[2+q+\sqrt{9-2q}-\left(2+q-\sqrt{9-2q}\right)\right]^2} = 2\sqrt{2}\ ;$$

Elevando ambo i membri al quadrato (il radicando è sempre positivo e il secondo membro è positivo):

$$\left[-2-\sqrt{9-2q}+2-\sqrt{9-2q}\right]^2 + \left[2+q+\sqrt{9-2q}-2-q+\sqrt{9-2q}\right]^2 = 8\ ;$$

$$\left[-2\sqrt{9-2q}\right]^2 + \left[2\sqrt{9-2q}\right]^2 = 8\ ;$$

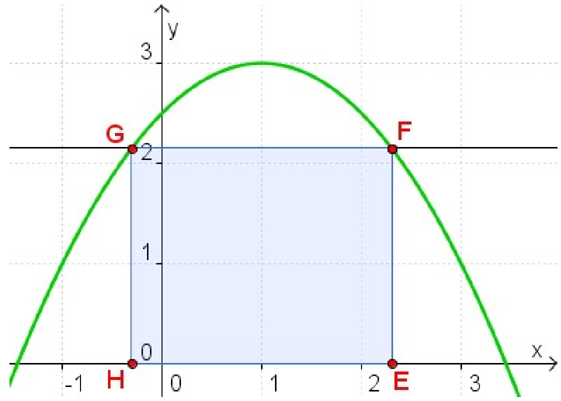
$$4(9-2q) + 4(9-2q) = 8\ ;$$

$$36 - 8q + 36 - 8q = 8\ ;$$

$$16q = 64\ ;$$

$$q = 4\ .$$

L'equazione della retta r è : $\boldsymbol{y = -x + 4}$



Soluzione c

Determiniamo le coordinate dei vertici G *e* F.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \\ y = q \end{cases} \qquad \begin{cases} q = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + q - \frac{5}{2} = 0 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x + 2q - 5 = 0 \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-(2q-5)} \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6-2q} \\ --- \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad F\left(1+\sqrt{6-2q}\,;\, q\right)$ *e* $G\left(1-\sqrt{6-2q}\,;\, q\right)$.

Affinchè il quadrilatero EFGH sia un quadrato, deve risultare: $\overline{FG} = \overline{EF}$.

$|x_F - x_G| = |y_F - y_E|$; *Essendo* $x_F - x_G \geq 0$ *e* $y_F - y_E \geq 0$ *si ottiene:*

$x_F - x_G = y_F - y_E$;

$1 + \sqrt{6-2q} - \left(1 - \sqrt{6-2q}\right) = q - 0$;

$2\sqrt{6-2q} = q$;

$\sqrt{6-2q} = \frac{q}{2}$;

$$\begin{cases} q \geq 0 \\ 6-2q \geq 0 \\ 6-2q = \frac{q^2}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \geq 0 \\ q \leq 3 \\ 24 - 8q = q^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} q \geq 0 \\ q \leq 3 \\ q^2 + 8q - 24 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} q \geq 0 \\ q \leq 3 \\ q_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16+24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q \geq 0 \\ q \leq 3 \\ q_{1,2} = -4 \pm \sqrt{40} \end{cases} \qquad \begin{cases} q \geq 0 \\ q \leq 3 \\ q_{1,2} = -4 \pm 2\sqrt{10} = \begin{matrix} q_1 = -4 - 2\sqrt{10} \\ q_2 = -4 + 2\sqrt{10} \end{matrix} \end{cases}$$

Soltanto la soluzione $q_2 = -4 + 2\sqrt{10}$ *è accettabile, poiché verifica le condizioni:* $0 \leq q \leq 3$.

Esercizio 3

Sia dato il fascio di parabole di equazione: $kx^2 + x + 2y - 9k - 1 = 0\,,\quad k \in R$.

a. Individua la natura del fascio, trova eventuali punti base e parabole degeneri.
b. Determina la parabola γ tangente in $A(3; -1)$ alla retta $t : x - y - 4 = 0$.
c. Dopo aver trovato la retta *r* passante per $B(-3; 2)$ e perpendicolare a *t*, verifica che passa per il vertice di γ .
d. Detto C il punto di intersezione fra *t* e *r*, determina l'area di ciascuna delle due parti in cui il triangolo ABC è diviso da γ .

<u>*Soluzione a*</u>

Scriviamo l'equazione del fascio di parabole come combinazione lineare: $x + 2y - 1 + k \cdot (x^2 - 9) = 0$

Per $k = 0$ *si ottiene la parabola degenere* γ_1: $x + 2y - 1 = 0$

$\nexists k \in R\,,\ per\ \ k \to \infty$ *si ottiene la parabola degenere* γ_2: $x^2 - 9 = 0\,;\ (x+3)(x-3) = 0$

Determiniamo gli eventuali punti base del fascio:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 2y \\ - - - \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ (1-2y)^2 - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ 1 + 4y^2 - 4y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - - - \\ 4y^2 - 4y - 8 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - - - \\ y_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1 \\ y_2 = \dfrac{1+3}{2} = +2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = +3 \\ y_1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = +2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A $(3\,;\,-1)$ e B $(-3\,;\,2)$ *Punti base del fascio.*

Scriviamo il fascio di parabole in forma canonica:

$kx^2 + x + 2y - 9k - 1 = 0\,;$

$2y = -kx^2 - x + 9k + 1$

$y = -\dfrac{k}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}k + \dfrac{1}{2}$.

Per $k = 0$ *si ottiene la parabola degenere (retta):*

$y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$; $\quad 2y = -x - 1\,;\quad x + 2y - 1 = 0$.

Pertanto le parabole degeneri sono:

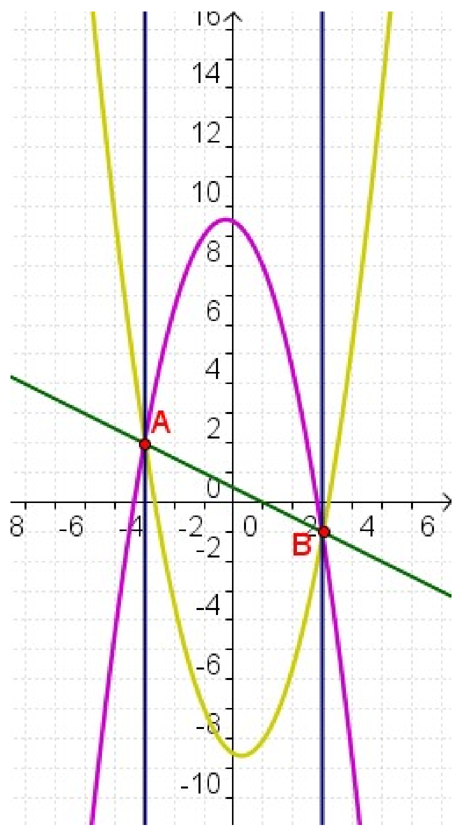
la retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$,

la coppia di rette verticali $x + 3 = 0$ *e* $x - 3 = 0$.

Rappresentiamo alcune parabole del fascio.

Per $k = 2 \quad \Rightarrow \quad y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{19}{2}$

Per $k = -2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{17}{2}$.



Soluzione b

La parabola γ tangente in A(3; –1) alla retta t: $x-y-4=0$ si ottiene sfruttando la condizione di tangenza della retta alla parabola.

$$\begin{cases} y=-\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}k+\frac{1}{2} \\ x-y-4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}k+\frac{1}{2} \\ y=x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-4=-\frac{k}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}k+\frac{1}{2} \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-8=-kx^2-x+9k+1 \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} kx^2+3x-9k-9=0 \\ --- \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza.

$\Delta=0$; $\quad b^2-4ac=0$; $\quad 3^2-4\cdot k\cdot(-9k-9)=0$; $\quad 36k^2+36k+9=0$;

$(6k+3)^2=0$; $\quad 6k+3=0$; $\quad k_{1,2}=-\frac{1}{2}$.

Pertanto la parabola ha equazione:

$$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$$

Soluzione c

Il coefficiente angolare della retta t è $m_t=1$.

La retta r passante per B(–3; 2) e perpendicolare a t ha equazione:

$$y-y_B=-\frac{1}{m_t}\cdot(x-x_B)\ ; \qquad y-2=-1\cdot(x+3)\ ; \qquad y=-x-1\ .$$

Il vertice della parabola γ ha coordinate:

$$x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{4}}=1 \qquad \Rightarrow \qquad V\,(1\,;\,-2)$$

$$y_V=\frac{1}{4}\cdot 1^2-\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{7}{4}=\frac{1-2-7}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

Tale punto appartiene alla retta $y=-x-1$. Infatti: $\quad -2=-1-1$.

$d)$ $\qquad C\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\right) \qquad \frac{19}{3} \qquad \frac{5}{12}$