FASCI DI PARABOLE

TEORIA

Date due parabole:

γ_1 di equazione $y = ax^2 + bx + c$

γ_2 di equazione $y = a'x^2 + b'x + c'$

si dice **fascio di parabole** generato da γ_1 e γ_2 l'insieme costituito dalla parabola γ_2 e da tutte le parabole che si ottengono dall'equazione:

$$\boldsymbol{y - ax^2 - bx - c + k \cdot (\, y - a'x^2 - b'x - c'\,) = 0} \qquad \text{al variare di } k \in R\,.$$

Le due parabole γ_1 e γ_2 vengono dette **parabole generatrici** del fascio.

Per $k = 0$ si ottiene la parabola γ_1 $\quad y = ax^2 + bx + c$

Mentre per nessun valore di k si può ottenere la parabola γ_2 $\quad y = a'x^2 + b'x + c'$

Tuttavia se dividiamo tutti i termini per k si ha:

$$\frac{1}{k} \cdot (y - ax^2 - bx - c) + y - a'x^2 - b'x - c' = 0$$

e se a k assegniamo valori sempre più grandi, cioè:

per $k \longrightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} \longrightarrow 0$ e si ottiene la parabola γ_2 $\quad y = a'x^2 + b'x + c'$.

Gli eventuali punti di intersezione delle due parabole generatrici sono detti **punti base del fascio**.

L'equazione del fascio può essere riscritta nella forma:

$y - ax^2 - bx - c + k \cdot (y - a'x^2 - b'x - c') = 0$;

$y - ax^2 - bx - c + ky - ka'x^2 - kb'x - kc' = 0$;

$y + ky = ax^2 + bx + c + ka'x^2 + kb'x + kc'$;

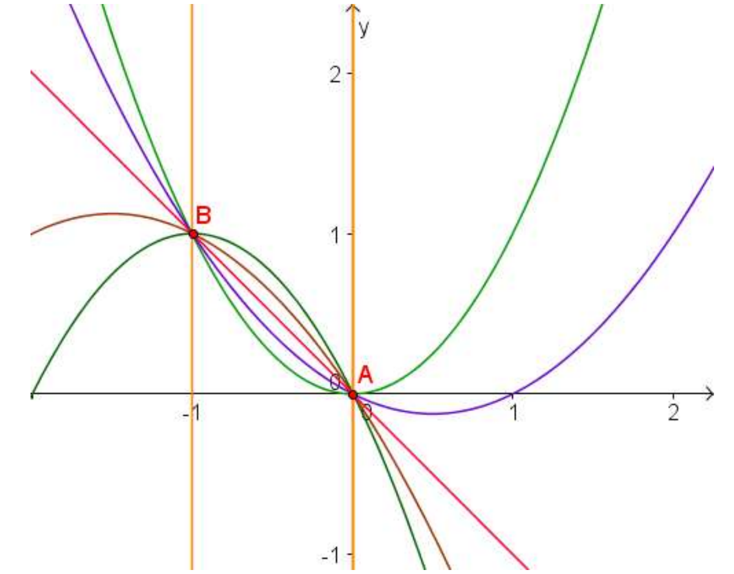
$$\boldsymbol{(k+1)\; y = (a + ka')\; x^2 + (b + kb')\, x + (c + kc')}$$

L'equazione rappresenta una parabola se $k \neq -1 \quad \wedge \quad k \neq -\frac{a}{a'}$.

<table>
<tr><td rowspan="3">Per $\boldsymbol{k = -1}$</td><td colspan="2">si annulla il coefficiente di y. Si ottiene un'equazione di secondo grado nella variabile x:
$(a + ka')\, x^2 + (b + kb')\, x + (c + kc') = 0$</td></tr>
<tr><td>Se $\Delta > 0$</td><td>si ottiene una parabola degenere rappresentata da due rette verticali.</td></tr>
<tr><td>Se $\Delta = 0$</td><td>si ottiene una parabola degenere rappresentata da una retta verticale.</td></tr>
<tr><td>Per $\boldsymbol{k = -\frac{a}{a'}}$</td><td colspan="2">si annulla il coefficiente di x^2. Si ottiene un'equazione di primo grado in x e y :
$(b + kb')\, x - (1 + k)y + (c + kc') = 0$
si ottiene una parabola degenere rappresentata da una retta.</td></tr>
</table>

Per lo studio del fascio occorre esaminare la reciproca posizione delle parabole generatrici:

Se $a \neq a'$,
cioè se le due parabole generatrici non sono congruenti oppure sono congruenti ma hanno concavità opposta, si hanno tre casi.

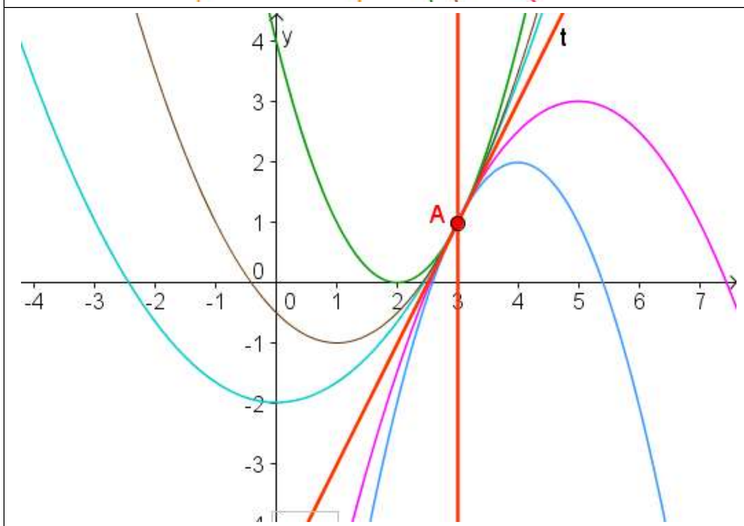


Le parabole generatrici sono secanti in A e B.

Il fascio ha due punti base: A e B.

Il fascio è costituito da tutte le parabole passanti per i punti A e B.

Il fascio contiene due parabole degeneri:
- la retta AB
- la coppia di rette verticali passanti per A e per B.

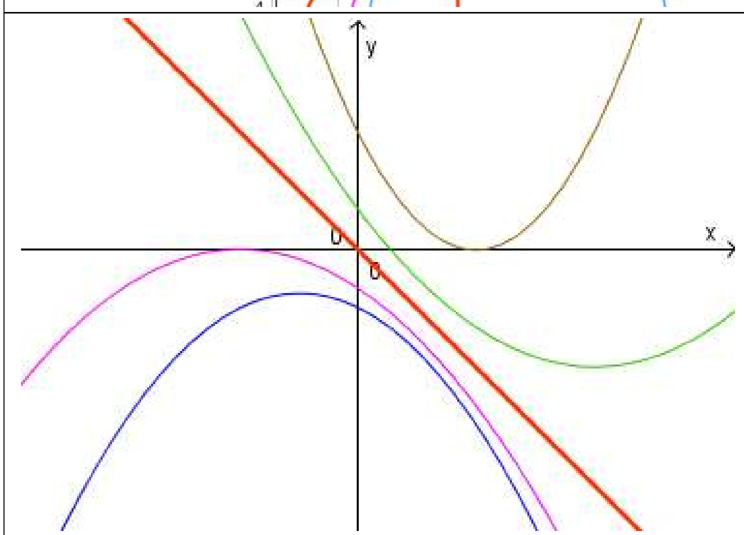


Le parabole generatrici sono tangenti in un punto A alla retta t.

Il fascio ha due punti base coincidenti in A.

Il fascio è costituito da tutte le parabole tangenti in A alla retta t.

Il fascio contiene due parabole degeneri:
- la retta t
- la retta verticale passante per A.

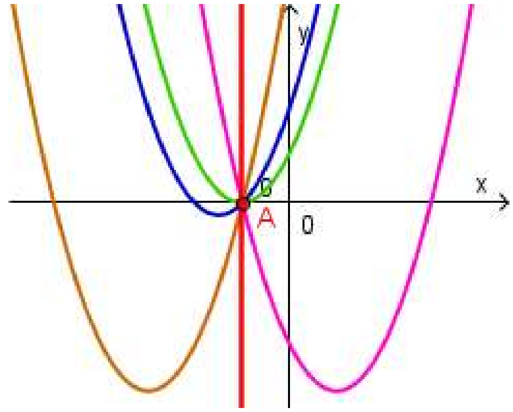
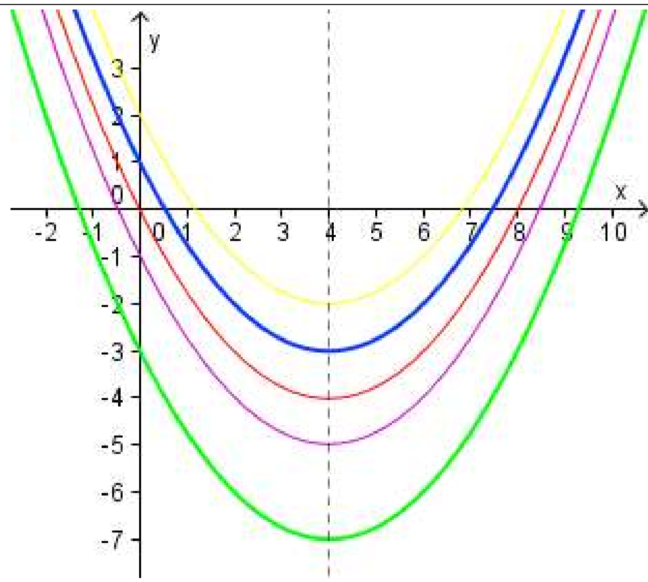


Le due parabole generatrici non si intersecano.

Il fascio non ha punti base.

Il fascio è costituito da parabole che non hanno punti in comune.

Il fascio contiene una parabola degenere:
- una retta che non interseca alcuna parabola del fascio.

Se $a = a'$, cioè se le due parabole generatrici sono congruenti, si hanno due casi.	
	Le parabole generatrici hanno un solo punto in comune A (non doppio). Il fascio ha un solo punto base: il punto A. Il fascio è costituito da parabole congruenti e con la stessa concavità passanti per A. Il fascio contiene una parabola degenere: la retta verticale passante per A.
	Le parabole generatrici non hanno punti in comune. Il fascio è privo di punti base. Il fascio è costituito da parabole congruenti, con la stessa concavità e con il medesimo asse di simmetria. Il fascio non contiene parabole degeneri.