

Esercizio 5

Data, nel piano xOy , la famiglia P di curve di equazione: $y = \frac{x+m-1}{-mx+2-m}$ ($m \in \mathbb{R}$)

a) determinare per quali valori di m l'equazione data rappresenta un'iperbole equilatera traslata;

b) determinare il luogo r dei centri di simmetria delle iperboli della famiglia;

c) determinare l'iperbole γ della famiglia passante per il punto $A\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ e tracciarne il grafico.

Soluzione a

L'equazione $y = \frac{x+m-1}{-mx+2-m}$ rappresenta un'iperbole equilatera traslata per:

1. $c \neq 0$; $m \neq 0$
2. $ad \neq bc$; $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\text{Infatti: } 1 \cdot (2-m) = -m \cdot (m-1); \quad 2-m = -m^2+m; \quad m^2-2m+2=0; \quad y_{1,2} = 1 \mp \sqrt{-1}.$$

Per $m=0$ si ha la retta: $y = \frac{x-1}{2}$.

Soluzione b

Gli asintoti del fascio sono: $y = -\frac{1}{m}$ e $x = \frac{2-m}{m}$.

Pertanto il luogo dei centri di simmetria è: $\begin{cases} x = \frac{2-m}{m} \\ y = -\frac{1}{m} \end{cases}$ Ricavando dalla 1ª equazione il parametro m

$mx = 2-m$; $(x+1)m = 2$; $m = \frac{2}{x+1}$ con $x+1 \neq 0$ e sostituendo nella 1ª equazione:

$$y = -\frac{1}{\frac{2}{x+1}}; \quad y = -\frac{x+1}{2}; \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{escluso il punto } P(-1;0), \text{ poiché } x+1 \neq 0.$$

Soluzione c

L'iperbole della famiglia P si ottiene imponendo il passaggio per il punto $A\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

$$-\frac{2}{3} = \frac{0+m-1}{-m \cdot 0 + 2-m}; \quad -\frac{2}{3} = \frac{m-1}{2-m}; \quad -2 \cdot (2-m) = 3 \cdot (m-1); \quad -4+2m = 3m-3; \quad m = -1$$

Pertanto l'iperbole richiesta ha equazione:

$$y = \frac{x-2}{x+3}.$$

