

Esercizio 5

Data, nel piano xOy , la famiglia P di curve di equazione: $y = \frac{x+m-1}{-mx+2-m}$ ($m \in \mathbb{R}$)

- determinare per quali valori di m l'equazione data rappresenta un'iperbole equilatera traslata;
- determinare il luogo r dei centri di simmetria delle iperboli della famiglia;
- determinare l'iperbole γ della famiglia passante per il punto $A\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ e tracciarne il grafico.

Soluzione a

L'equazione $y = \frac{x+m-1}{-mx+2-m}$ rappresenta un'iperbole equilatera traslata per:

- $c \neq 0$; $m \neq 0$
- $ad \neq bc$; $\forall m \in \mathbb{R}$

Infatti: $1 \cdot (2-m) = -m \cdot (m-1)$; $2-m = -m^2+m$; $m^2-2m+2=0$; $y_{1,2} = 1 \mp \sqrt{-1}$.

Per $m=0$ si ha la retta: $y = \frac{x-1}{2}$.

Soluzione b

Gli asintoti del fascio sono: $y = -\frac{1}{m}$ e $x = \frac{2-m}{m}$.

Pertanto il luogo dei centri di simmetria è: $\begin{cases} x = \frac{2-m}{m} \\ y = -\frac{1}{m} \end{cases}$ Ricavando dalla 1ª equazione il parametro m

$mx = 2-m$; $(x+1)m = 2$; $m = \frac{2}{x+1}$ con $x+1 \neq 0$ e sostituendo nella 1ª equazione:

$y = -\frac{1}{\frac{2}{x+1}}$; $y = -\frac{x+1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ escluso il punto $P(-1;0)$, poiché $x+1 \neq 0$.

Soluzione c

L'iperbole della famiglia P si ottiene imponendo il passaggio per il punto $A\left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

$-\frac{2}{3} = \frac{0+m-1}{-m \cdot 0 + 2-m}$; $-\frac{2}{3} = \frac{m-1}{2-m}$; $-2 \cdot (2-m) = 3 \cdot (m-1)$; $-4+2m = 3m-3$; $m = -1$

Pertanto l'iperbole richiesta ha equazione:

$y = \frac{x-2}{x+3}$.

