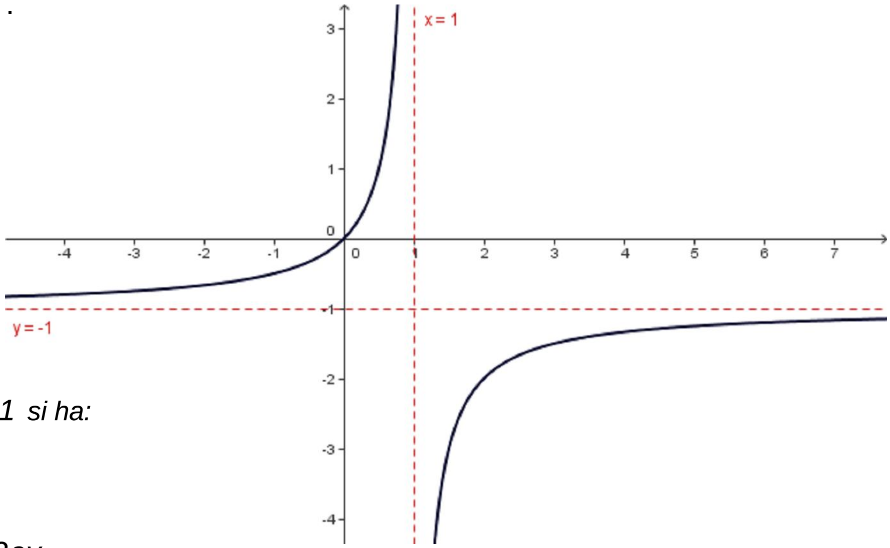
Esercizio 4

Dopo aver disegnato la curva $\gamma :\ y=\dfrac{x}{1-x}$ determinare l'equazione della parabola P avente per asse di simmetria l'asintoto orizzontale di γ e tangente a γ nell'origine O degli assi. Calcolare l'area del segmento parabolico delimitato da P e dall'asintoto verticale di γ .

<u>Soluzione</u>

γ rappresenta un iperbole equilatera traslata avente asintoti:

$y=-1$ e $x=1$.



L'equazione della parabola P richiesta è del tipo:

$x=ay^2+by$

Essendo l'asintoto orizzontale di γ : $y=-1$ si ha:

$-\dfrac{b}{2a}=-1$; da cui: $b=2a$.

Pertanto la parabola è del tipo: $x=ay^2+2ay$.

L'equazione della tangente all'iperbole nell'origine si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x}{1-x} \\ y=mx \end{cases} \qquad \begin{cases} mx=\dfrac{x}{1-x} \\ - \end{cases} \qquad mx-mx^2=x\ ; \qquad mx^2+(1-m)x=0\ ;$$

e imponendo la condizione di tangenza $\Delta=0$; $b^2-4ac=0$; $(1-m)^2-4m\cdot 0=0$; $(1-m)^2=0$; $m=1$.

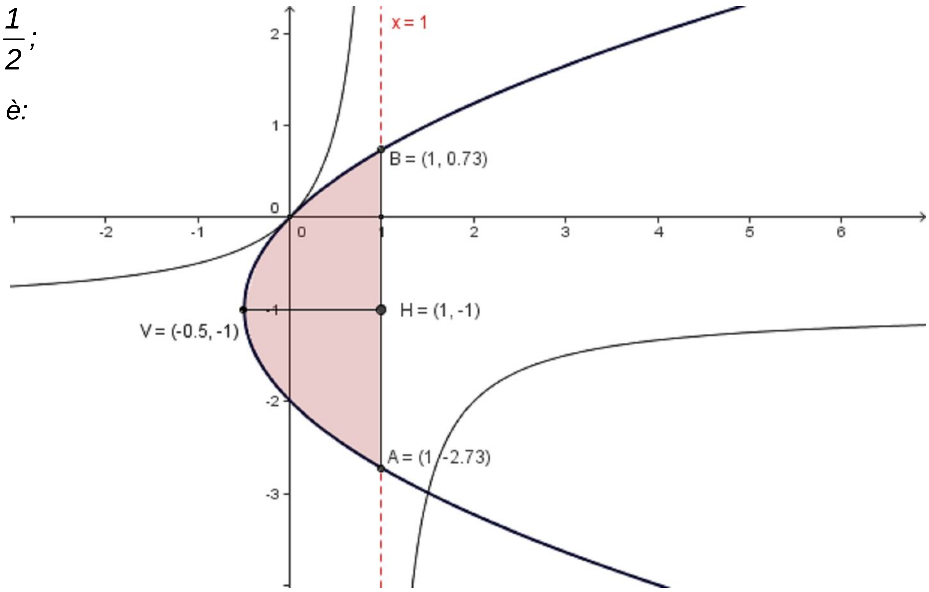
Pertanto l'equazione della tangente all'iperbole nell'origine è: $y=x$

Imponendo che questa tangente sia anche tangente alla parabola nell'origine si ha:

$\dfrac{1}{m}=2a\cdot y_O+2a$; $\dfrac{1}{1}=+2a$; $a=\dfrac{1}{2}$;

L'equazione della parabola P richiesta è:

$x=\dfrac{1}{2}y^2+y$.



Essa è intersecata dall'asintoto verticale $x=1$ nei punti

$A\left(1;-1-\sqrt{3}\right)$ e $B\left(1;-1+\sqrt{3}\right)$

Infatti: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}y^2+y \\ x=1 \end{cases} \qquad \dfrac{1}{2}y^2+y=1$

$y^2+2y-2=0$; $y_{1,2}=-1\mp\sqrt{3}$

$\overline{AB}=y_B-y_A\ -1+\sqrt{3}-\left(-1-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$

$x_V=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{2}}=-1$; $x_V=\dfrac{1}{2}\cdot(-1)^2-1=-\dfrac{1}{2}$; $\overline{AB}=x_H-x_V=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

L'area del segmento parabolico è: $S=\dfrac{2}{3}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{VH}\ =\ \dfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{3}{2}\ =\ 2\sqrt{3}$.