

Esercizio 2

Una retta variabile passante per $A(6; 3)$ incontra l'asse x in P e l'asse y in Q . Determinare il luogo descritto dal punto medio M del segmento PQ e tracciarne il grafico.

Soluzione

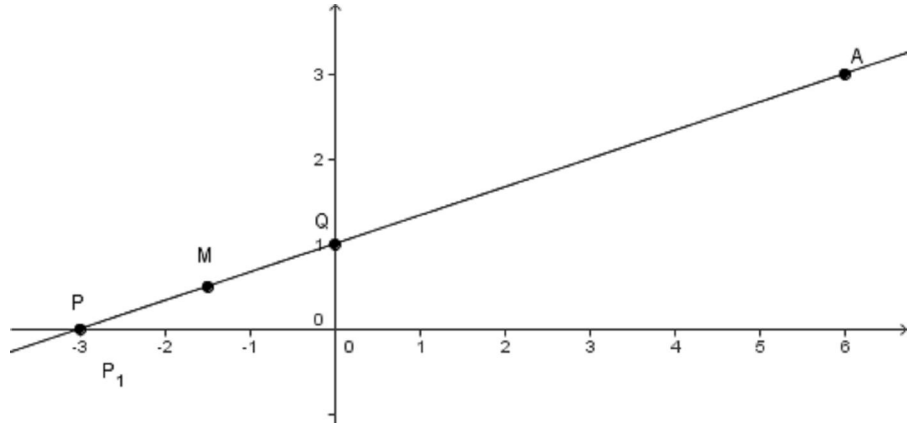
Il fascio di rette passante per $A(6; 3)$ è:

$$y - 3 = m \cdot (x - 6); \quad y = mx - 6m + 3;$$

Le rette del fascio incontrano entrambi gli assi quando $m \neq 0$ e $m \neq \infty$.

$$\begin{cases} y = mx - 6m + 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -6m + 3 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(0; 3 - 6m)$$



$$\begin{cases} 0 = mx - 6m + 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} mx = 6m - 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 - \frac{3}{m} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow Q\left(6 - \frac{3}{m}; 0\right)$$

$$\text{Il punto medio } M \text{ ha coordinate: } \begin{cases} x_M = \frac{6 - \frac{3}{m}}{2} = 3 - \frac{3}{2m} \\ y_M = \frac{3 - 6m}{2} = \frac{3}{2} - 3m \end{cases} \Rightarrow P\left(3 - \frac{3}{2m}; \frac{3}{2} - 3m\right)$$

$$\text{Pertanto le equazioni parametriche del luogo richiesto sono: } \begin{cases} x = 3 - \frac{3}{2m} \\ y = \frac{3}{2} - 3m \end{cases} \quad \text{con } m \neq 0 \text{ e } m \neq \infty.$$

$$\text{Ricavando dalla I}^\circ \text{ equazione } x = 3 - \frac{3}{2m} \text{ il parametro } m \quad \frac{3}{2m} = 3 - x; \quad \frac{2m}{3} = \frac{1}{3 - x}; \quad m = \frac{3}{2 \cdot (3 - x)}$$

$$\text{e sostituendo nella II}^\circ \text{ equazione: } y = \frac{3}{2} - 3m; \quad y = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2 \cdot (3 - x)}; \quad y = \frac{9 - 3x - 9}{2 \cdot (3 - x)}; \quad y = \frac{-3x}{2 \cdot (3 - x)};$$

$$y = \frac{3x}{-2 \cdot (3 - x)}; \quad y = \frac{3x}{2x - 6}.$$

Essa rappresenta un'iperbole equilatera traslata avente asintoti:

$$y = \frac{3}{2} \text{ e } x = 3.$$

