L'iperbole traslata
Esercizi

Esercizio 472.121.b

Traccia il grafico della curva di equazione: $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole.

Cerchiamo di scrivere l'equazione nella forma: $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

$9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$;

$9x^2 + 18x - 4y^2 + 8y - 31 = 0$;

$9(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) - 31 = 0$;

Affinché i polinomi dentro le parentesi tonde diventino quadrati di binomi occorre aggiungere i quadrati mancanti e, per non alterare l'equazione, sottrarre gli stessi quadrati aggiunti (fuori delle parentesi tonde):

$9(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) - 31 - 9 + 4 = 0$;

$9(x+1)^2 - 4(y-1)^2 = 36$;

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \ ;$$

Si tratta di un'iperbole con asse focale parallelo all'asse x.

Infatti applicando la traslazione di equazioni: $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y-1 \end{cases}$ si ottiene l'equazione: $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1$

Il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate: $O'(-1;+1)$.

Gli assi hanno equazione: $x = -1$ e $y = 1$.

I semiassi misurano: $a = \sqrt{4} = 2$ *e* $b = \sqrt{9} = 3$.

La semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse x, i vertici reali hanno coordinate: $V_1(1;1)$ e $V_2(-3\,;1)$.

Infatti applicando le relazioni:

$x_{V_1} = x_{O'} + a = -1 + 2 = +1$

$y_{V_1} = y_{O'} = 1$

$x_{V_2} = x_{O'} - a = -1 - 2 = -3$

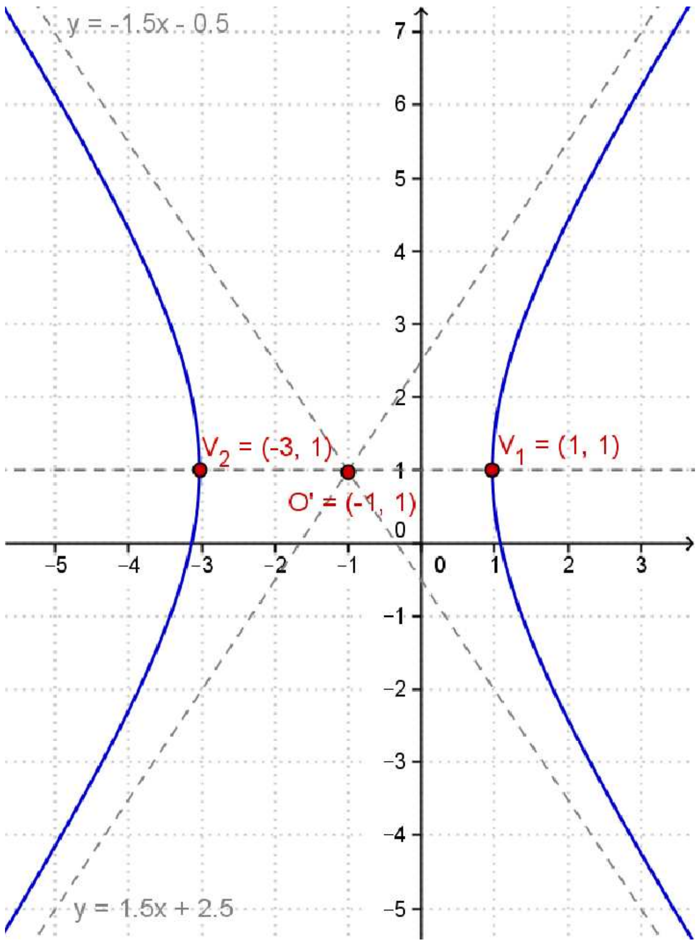
$y_{V_2} = y_{O'} = 1$

Gli asintoti hanno equazione:

$y = +\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ e $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Infatti gli asintoti sono rette passanti per il centro di simmetria $O'(-1;+1)$ *e* avente coefficiente angolare $m = \pm\frac{3}{2}$:

$y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x+1)$; $\quad y = +\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ $\quad y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$



Metodo 2 - Formule

L'equazione $9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0$ è del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Il centro di simmetria ha coordinate:

$$x_{O'} = -\frac{C}{2A} = -\frac{18}{2 \cdot 9} = -1 \; ; \qquad y_{O'} = -\frac{D}{2B} = -\frac{8}{2 \cdot (-4)} = +1 \qquad \Rightarrow \qquad O' \, (-1 \; ; \; 1)$$

Gli assi hanno equazione: $x = -1$ *e* $y = +1$.

I vertici reali hanno coordinate: $V_1 \, (-3; \; 1)$ e $V_2 \, (1 \; ; \; 1)$.

Infatti:

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - 4 \cdot 1 + 18x + 8 \cdot 1 - 31 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 18x - 27 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Delta = 1 + 3 = 4 \; ;$$

$$x_{1,2} = -1 \mp 2 = \begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = +1 \end{matrix}$$

I vertici non reali hanno coordinate: $V_3 \, (-1; \; 4)$ e $V_4 \, (-1 \; ; -2)$.

Infatti:

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 + 18x + 8y - 31 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9 - 4y^2 - 18 + 8y - 31 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4y^2 + 8y - 40 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 - 2y + 10 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \Delta = 1 - 10 = -9 \; ;$$

Consideriamo il valore assoluto del discriminante: $|\Delta| = |-9| = 9$; $\quad y_{1,2} = 1 \mp 3 = \begin{matrix} y_3 = +4 \\ y_4 = -2 \end{matrix}$

Gli asintoti hanno equazione:

$y = +3x + 10$ e $y = -3x - 8$

Infatti:

$$\overline{V_1V_2} = 2a = \left| x_{V_1} - x_{V_2} \right| = |-3 - 1| = 4 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

$$\overline{V_3V_4} = 2b = \left| y_{V_3} - y_{V_4} \right| = |4 + 2| = 6 \qquad \Rightarrow \qquad b = 3$$

Gli asintoti sono rette passanti per il centro di simmetria $O'(-1; \; 1)$ e avente coefficiente angolare $m = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{3}{2}$:

$$y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x + 1) \; ; \qquad \begin{matrix} y = +\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Esercizio 472.99

Traccia il grafico della curva di equazione: $-9x^2 + y^2 - 54x - 2y - 71 = 0$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole.

Cerchiamo di scrivere l'equazione nella forma: $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

$-9x^2 + y^2 - 54x - 2y - 71 = 0$;

$9x^2 + 54x - y^2 + 2y + 71 = 0$;

$9(x^2 + 6x) - 1(y^2 - 2y) + 71 = 0$;

Affinché i polinomi dentro le parentesi tonde diventino quadrati di binomi occorre aggiungere i quadrati mancanti e, per non alterare l'equazione, sottrarre gli stessi quadrati aggiunti (fuori delle parentesi tonde):

$9(x^2 + 6x + 9) - 1(y^2 - 2y + 1) + 71 - 81 + 1 = 0$;

$9(x+3)^2 - 1(y-1)^2 = 9$;

$\frac{(x+3)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$;

Si tratta di un'iperbole con asse focale parallelo all'asse x.

Il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate:
$O'(-3; +1)$.

Gli assi hanno equazione: $x = -3$ e $y = 1$.

I semiassi misurano: $a = \sqrt{1} = 1$ *e* $b = \sqrt{9} = 3$.

La semidistanza focale $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse x, i vertici reali hanno coordinate: $V_1(-2; 1)$ e $V_2(-4\,; 1)$.

Infatti applicando le relazioni:

$x_{V_1} = x_{O'} + a = -3 + 1 = -2$

$y_{V_1} = y_{O'} = 1$

$x_{V_2} = x_{O'} - a = -3 - 1 = -4$

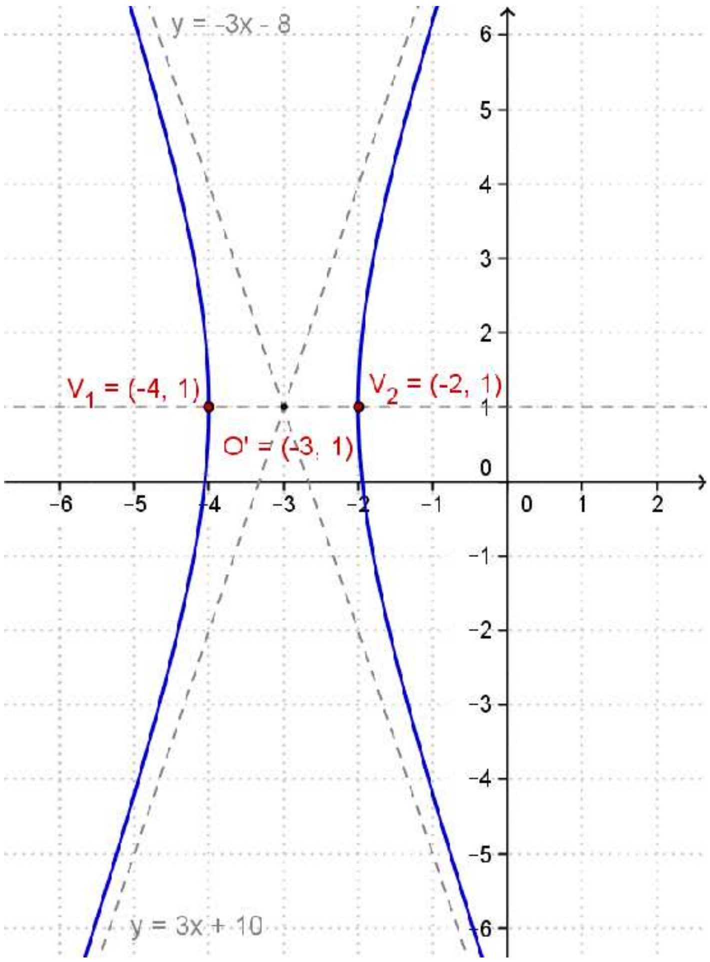
$y_{V_2} = y_{O'} = 1$

Gli asintoti hanno equazione:

$y = +3x + 10$ e $y = -3x - 8$

Infatti gli asintoti sono rette passanti per il centro di simmetria $O'(-3;\ 1)$ e avente coefficiente angolare $m = \pm 3$ *:*

$y - 1 = \pm 3(x + 3)$; $\quad \begin{array}{l} y = +3x + 10 \\ y = -3x - 8 \end{array}$



Metodo 2 - Formule

L'equazione $-9x^2+y^2-54x-2y-71=0$ è del tipo $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

Il centro di simmetria ha coordinate:

$$x_{O'}=-\frac{C}{2A}=-\frac{54}{2\cdot(-9)}=-3\ ; \qquad y_{O'}=-\frac{D}{2B}=-\frac{-2}{2\cdot 1}=+1 \qquad \Rightarrow \qquad O'\,(-3\ ;\ 1)$$

Gli assi hanno equazione: $x=-3$ e $y=+1$.

I vertici reali hanno coordinate: $V_1\,(-2;\ 1)$ e $V_2\,(-4\ ;\ 1)$.

Infatti:

$$\begin{cases}-9x^2+y^2-54x-2y-71=0\\ y=1\end{cases} \qquad \begin{cases}-9x^2+1-54x-2-71=0\\ y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}9x^2+54x+72=0\\ y=1\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+6x+8=0\\ y=1\end{cases} \qquad \Delta=9-8=1\ ;$$

$$x_{1,2}=-3\mp 1=\begin{matrix}x_1=-2\\ x_2=-4\end{matrix}$$

I vertici non reali hanno coordinate: $V_3\,(-3;\ 4)$ e $V_4\,(-3\,;-2)$.

Infatti:

$$\begin{cases}-9x^2+y^2-54x-2y-71=0\\ x=-3\end{cases} \qquad \begin{cases}-81+y^2+162-2y-71=0\\ x=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2-2y+10=0\\ x=-1\end{cases} \qquad \Delta=1-10=-9\ ;$$

Consideriamo il valore assoluto del discriminante: $|\Delta|=|-9|=9$; $y_{1,2}=1\mp 3=\begin{matrix}y_3=+4\\ y_4=-2\end{matrix}$

Gli asintoti hanno equazione:

$y=+3x+10$ e $y=-3x-8$

Infatti:

$$\overline{V_1V_2}=2a=\left|x_{V_1}-x_{V_2}\right|=|-2+4|=2 \qquad \Rightarrow \qquad a=1$$

$$\overline{V_3V_4}=2b=\left|y_{V_3}-y_{V_4}\right|=|4+2|=6 \qquad \Rightarrow \qquad b=3$$

Gli asintoti sono rette passanti per il centro di simmetria $O'(-3;\ 1)$ e avente coefficiente angolare $m=\pm\frac{b}{a}=\pm\frac{3}{1}$:

$$y-1=\pm 3(x+3)\ ; \qquad \begin{matrix}y=+3x+10\\ y=-3x-8\end{matrix}$$

Esercizio 472.108

Traccia il grafico della curva di equazione: $16x^2 - 4y^2 - 96x - 8y + 204 = 0$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole.

Cerchiamo di scrivere l'equazione nella forma: $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

$16x^2 - 4y^2 - 96x - 8y + 204 = 0$

$4x^2 - y^2 - 24x - 2y + 51 = 0$

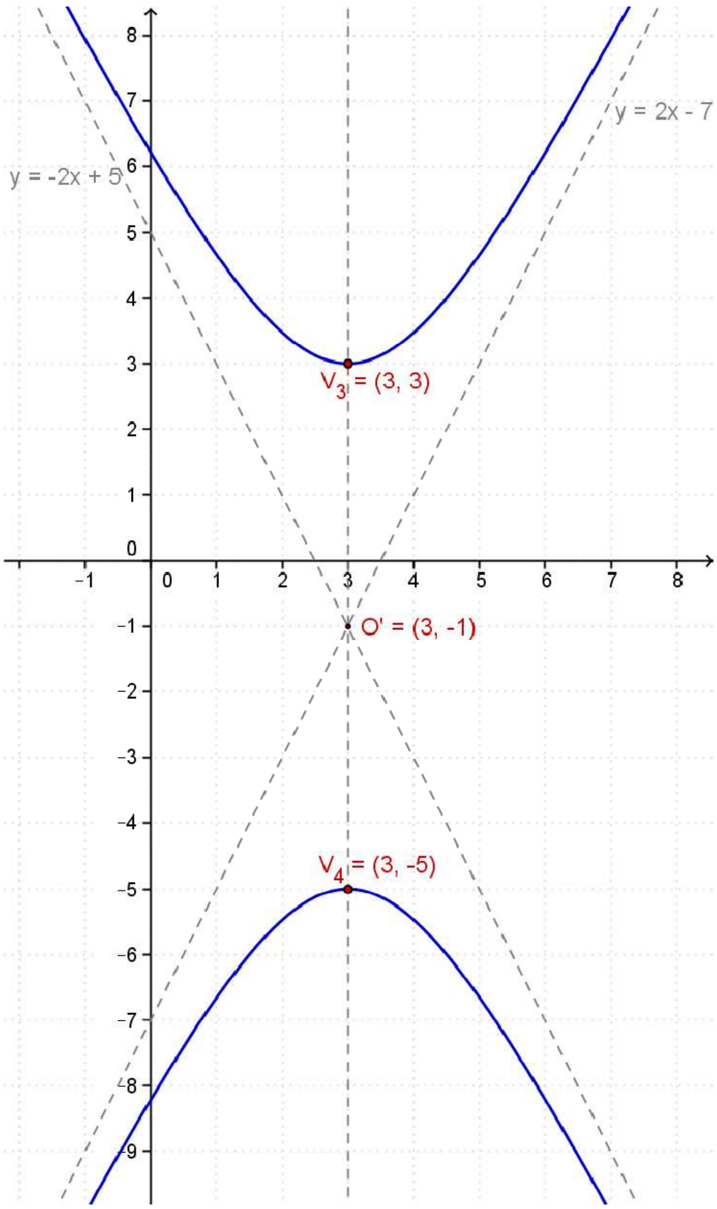
$4x^2 - 24x - y^2 - 2y + 51 = 0$

$4(x^2 - 6x) - (y^2 + 2y) + 51 = 0$

$4(x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 2y + 1) + 51 - 36 + 1 = 0$

$4(x-3)^2 \ - 1(y+1)^2 = -16$;

$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{16} = -1$;



Si tratta di un'iperbole con asse focale parallelo all'asse y.

Il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate: $O'(3;-1)$.

Gli assi hanno equazione: $x = 3$ e $y = -1$.

I semiassi misurano: $a = \sqrt{4} = 2$ *e* $b = \sqrt{16} = 4$.

La semidistanza focale $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$

Poiché l'iperbole ha l'asse focale parallelo all'asse y, i vertici reali hanno coordinate: $V_1(3;3)$ e $V_2(3\,;-5)$.

Infatti applicando le relazioni:

$x_{V_1} = x_{O'} = 3$

$y_{V_1} = y_{O'} + b = -1 + 4 = 3$

$x_{V_2} = x_{O'} = 3$

$y_{V_2} = y_{O'} - b = -1 - 4 = -5$

Gli asintoti hanno equazione:

$y = +2x - 7$ e $y = -2x + 5$

Infatti gli asintoti sono rette passanti per il centro di simmetria $O'(3;-1)$ e avente coefficiente angolare $m = \pm\frac{b}{a} = \pm\frac{4}{2}$:

$y + 1 = \pm 2(x-3)$; $\quad y = +2x - 7$, $\quad y = -2x + 5$

Metodo 2 - Formule

L'equazione $16x^2 - 4y^2 - 96x - 8y + 204 = 0$ è del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$4x^2 - y^2 - 24x - 2y + 51 = 0$;

Il centro di simmetria ha coordinate:

$$x_{O'} = -\frac{C}{2A} = -\frac{-24}{2 \cdot 4} = 3\ ; \qquad y_{O'} = -\frac{D}{2B} = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad O'\,(3\,;-1)$$

Gli assi hanno equazione: $x = 3$ $\quad e \quad$ $y = -1$.

I vertici reali hanno coordinate: $V_3\ (3;\ 3)$ e $V_4\ (3\,;-5)$.

Infatti:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 24x - 2y + 51 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 36 - y^2 - 72 - 2y + 51 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 2y - 15 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \qquad \Delta = 1 + 15 = 16\ ;$$

$$y_{1,2} = -1 \mp 4 = \begin{matrix} y_1 = +3 \\ y_2 = -5 \end{matrix}$$

I vertici non reali hanno coordinate: $V_1\ (5;\ -1)$ e $V_2\ (1\,;-1)$.

Infatti:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 24x - 2y + 51 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2 - 1 - 24x + 2 + 51 = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 24x + 52 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 6x + 13 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \Delta = 9 - 13 = -4\ ;$$

Consideriamo il valore assoluto del discriminante: $|\Delta| = |-4| = 4$; $\quad x_{1,2} = 3 \mp 2 = \begin{matrix} x_3 = +5 \\ x_4 = +1 \end{matrix}$

Gli asintoti hanno equazione:

$y = +3x + 10$ e $y = -3x - 8$

Infatti:

$$\overline{V_1V_2} = 2a = \left|x_{V_1} - x_{V_2}\right| = |5 - 1| = 4 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

$$\overline{V_3V_4} = 2b = \left|y_{V_3} - y_{V_4}\right| = |3 + 5| = 8 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4$$

Gli asintoti sono rette passanti per il centro di simmetria $O'(3;-1)$ e avente coefficiente angolare $\mathrm{m} = \pm\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \pm\frac{4}{2}$:

$$y + 1 = \pm 2(x - 3)\ ; \qquad \begin{matrix} y = +2x - 7 \\ y = -2x + 5 \end{matrix}$$

Esercizio 472.108

Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

Poiché i coefficienti di x^2 e y^2 sono opposti, si tratta di un'iperbole.

Cerchiamo di scrivere l'equazione nella forma: $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

$x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0\,;$

$x^2 - 6x - y^2 - 4y + 5 = 0\,;$

$(x^2 - 6x) - (y^2 + 4y) + 5 = 0\,;$

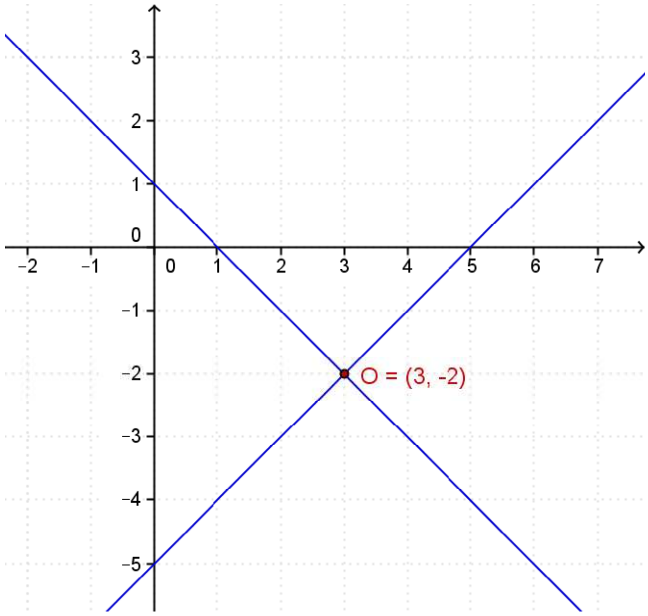
$(x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 4y + 4) + 5 - 9 + 4 = 0\,;$

$(x-3)^2 - (y+2)^2 = 0\,;$

$(x-3)^2 = (y+2)^2\,;$

$$x - 3 = \pm(y+2) \quad \begin{matrix} x - y - 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{matrix}$$

L'equazione data rappresenta un'iperbole degenere costituita dalle rette due incidenti passanti per il punto $O'(3;-2)$



Metodo 2 - Formule

L'equazione $x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ è del tipo $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Il centro di simmetria ha coordinate:

$$x_{O'} = -\frac{C}{2A} = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3\,; \qquad y_{O'} = -\frac{D}{2B} = -\frac{-4}{2\cdot(-1)} = -2 \qquad \Rightarrow \qquad O'\,(3\,;-2)$$

Gli assi hanno equazione: $x = 3$ *e* $y = -2$.

I quattro vertici sono coincidenti: $V_1\,(3;\,-2)$ $V_2\,(3\,;-2)$ $V_3\,(3;\,-2)$ $V_4\,(3\,;-2)$

Infatti:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4 - 6x + 8 + 5 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$$

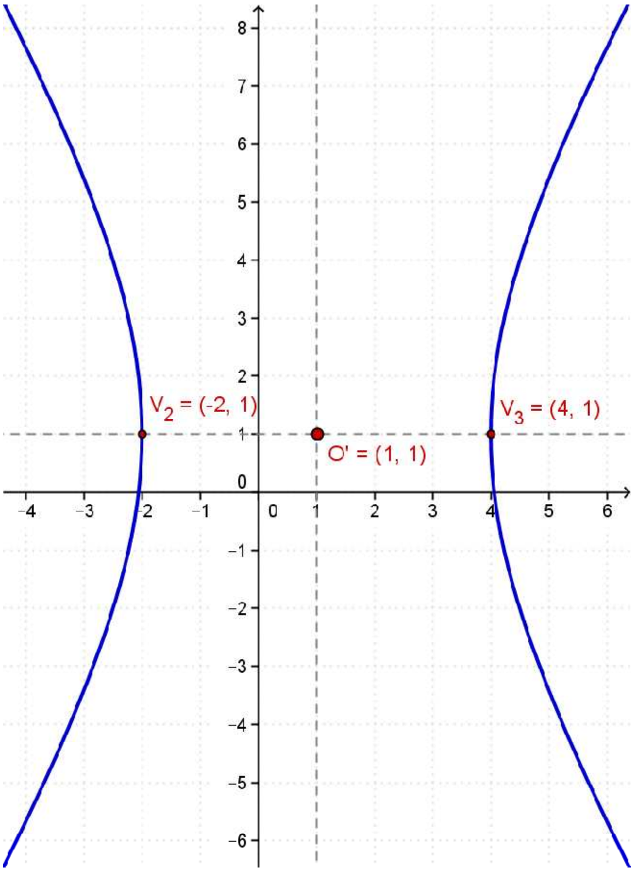
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 6x - 4y + 5 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9 - y^2 - 18 - 4y + 5 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + 4y + 4 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} (y+2)^2 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

L'equazione data rappresenta un'iperbole degenere costituita dalle due rette incidenti passanti per il punto $O'(3;-2)$

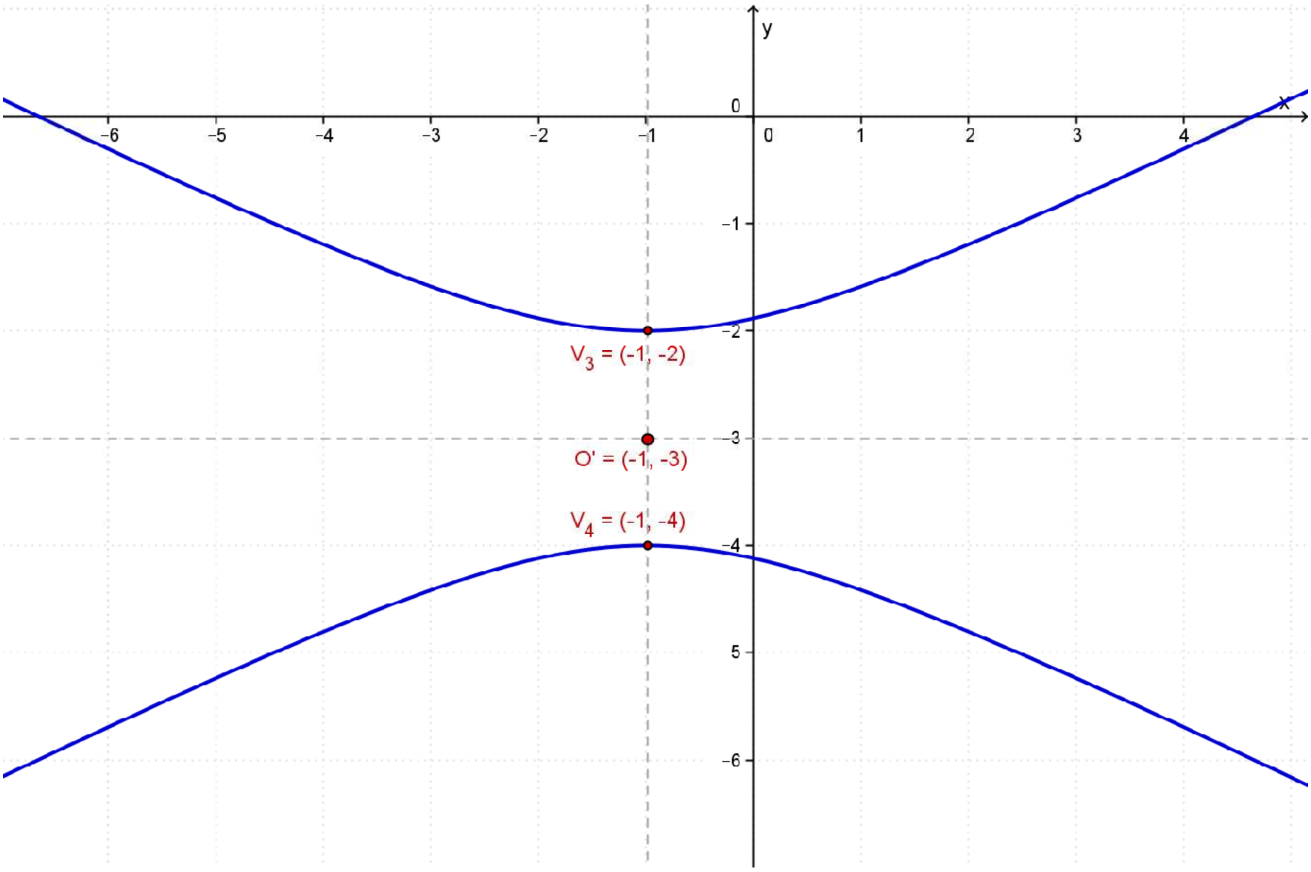
Esercizio 471.95

Traccia il grafico della curva di equazione: $25x^2 - 9y^2 - 50x + 18y - 209 = 0$



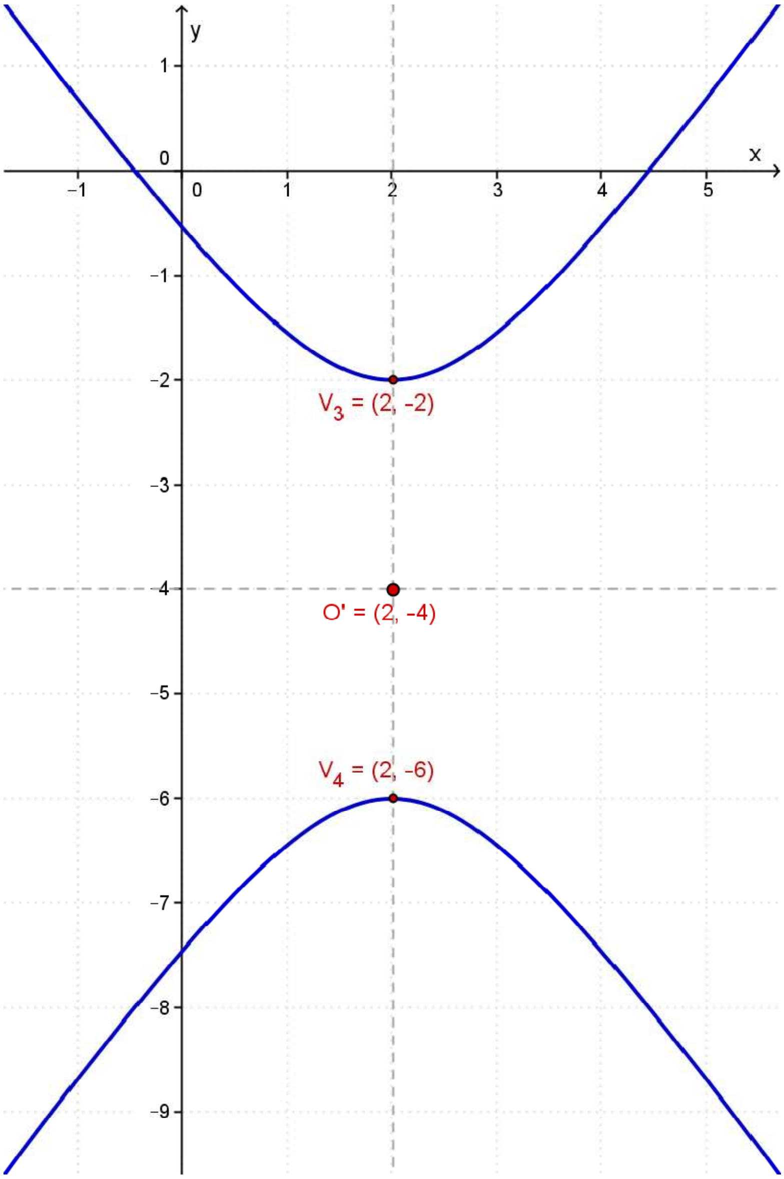
Esercizio 471.96

Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31 = 0$



Esercizio 471.97

Traccia il grafico della curva di equazione: $2x^2 - y^2 - 8x - 8y - 4 = 0$

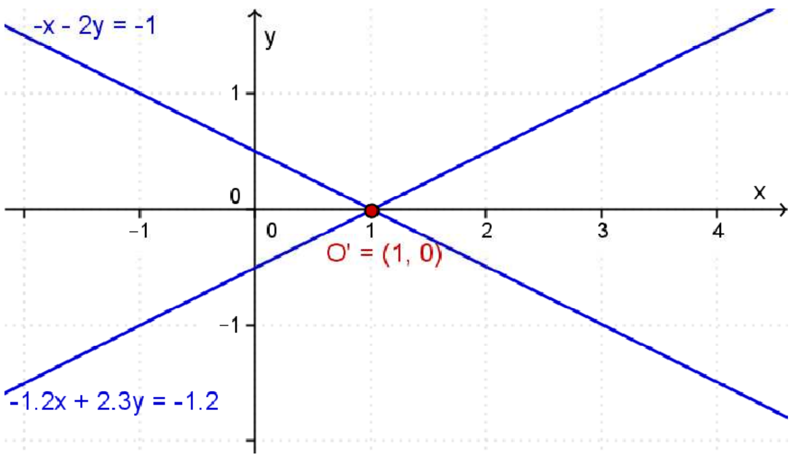


Esercizio 471.98

Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

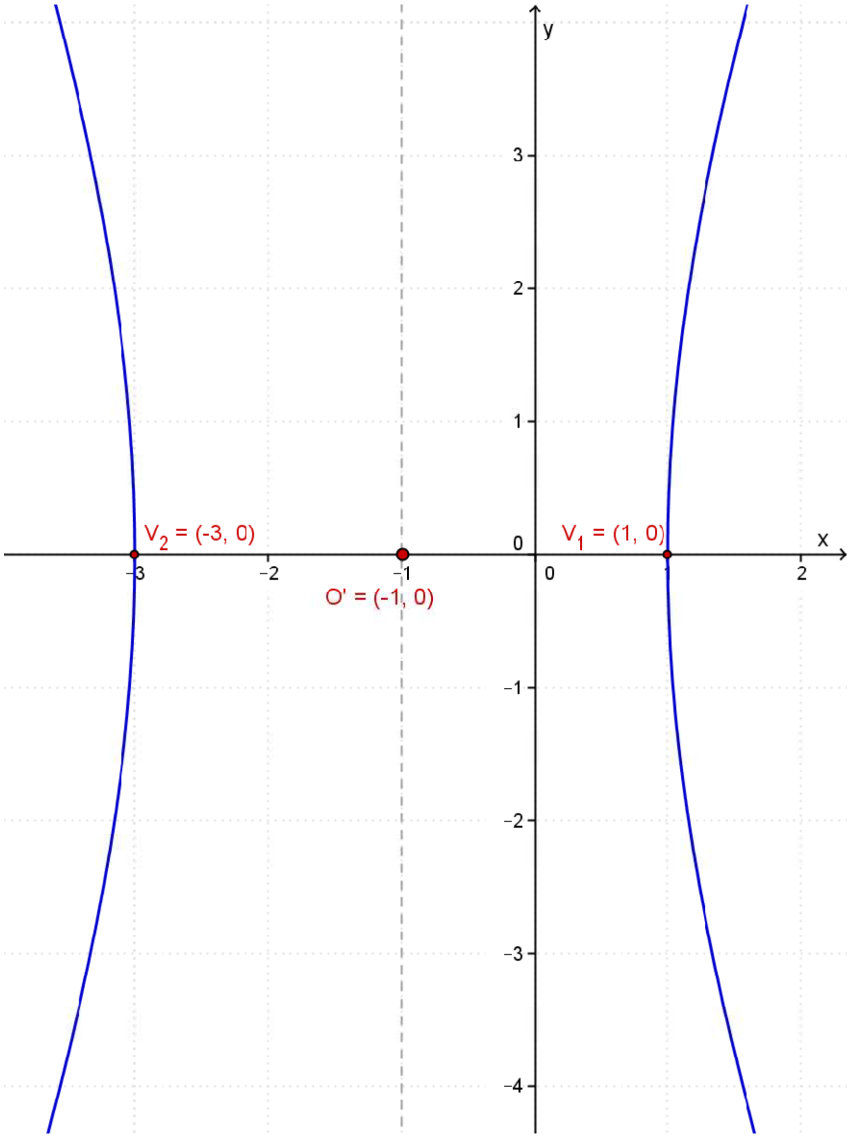
L'equazione data rappresenta un'iperbole degenere costituita dalle due rette incidenti passanti per il punto $O'(1; 0)$

$(x + 2y - 1)(x - 2y - 1) = 0$



Esercizio 471.100

Traccia il grafico della curva di equazione: $25x^2 - 4y^2 + 50x - 75 = 0$

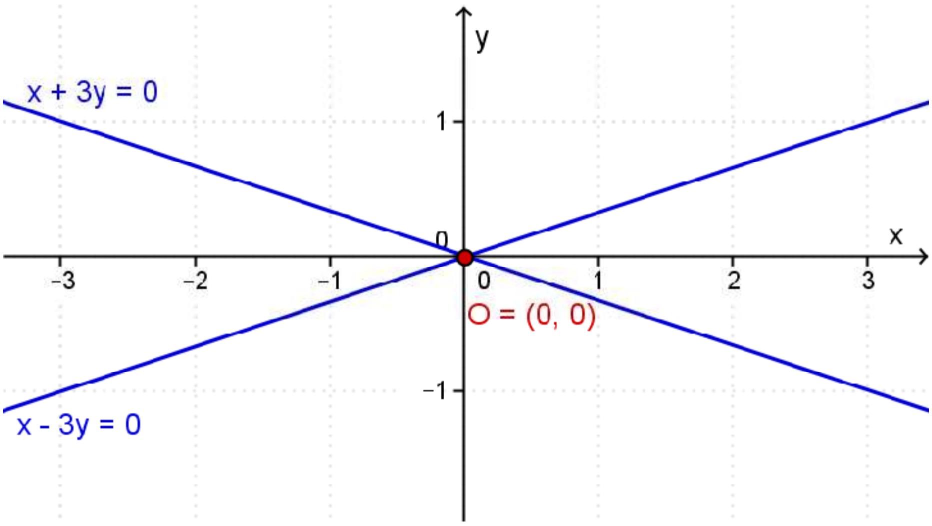


Esercizio 471.101

Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 - 9y^2 = 0$

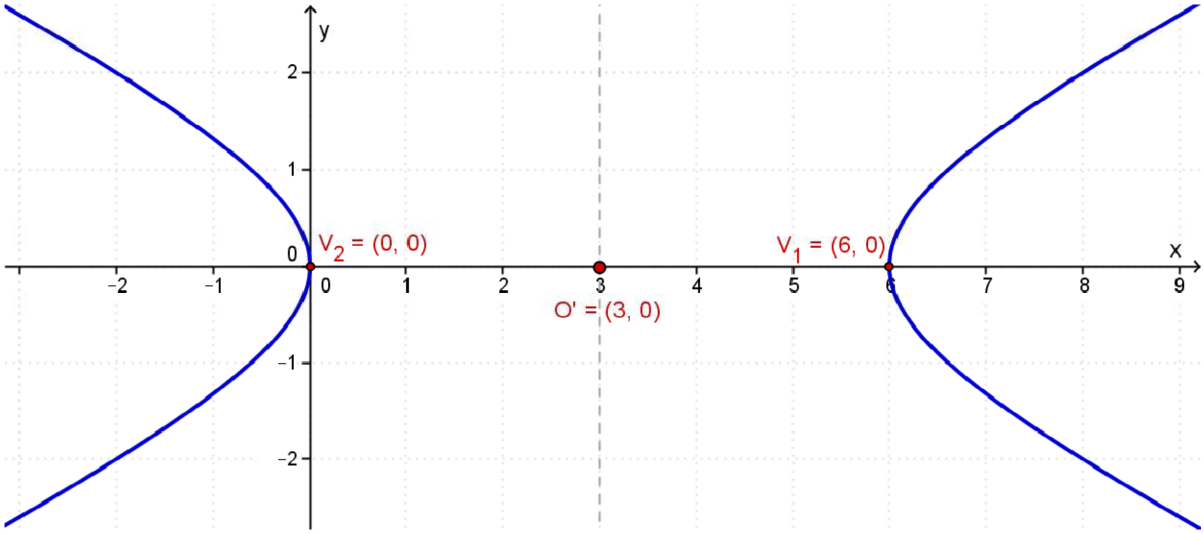
L'equazione data rappresenta un'iperbole degenere costituita dalle due rette incidenti passanti per il punto $O'(0; 0)$

$(x + 3y)(x - 3y) = 0$



Esercizio 471.102

Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 - 4y^2 - 6x = 0$



Esercizio 471.103

Traccia il grafico della curva di equazione: $x^2 - 9y^2 - 4x + 5 = 0$