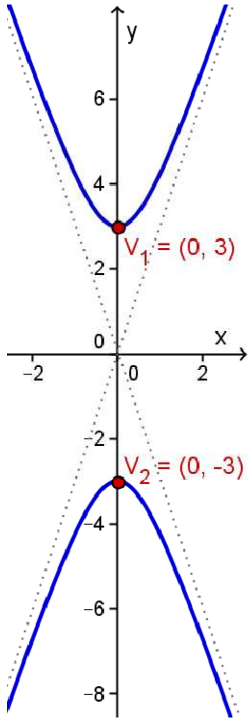
Esercizio 486.270

a) Considera l'iperbole di equazione $9x^2 - y^2 + 9 = 0$. Individua i suoi vertici e rappresentala graficamente.
b) Trova le equazioni delle rette tangenti all'iperbole condotte dal punto $A\left(-1; \frac{3}{5}\right)$. Siano B e C i punti di tangenza $(x_B > x_C)$.
c) Calcola l'area del triangolo ABC.
d) Determina un punto P sull'iperbole, con ordinata positiva e ascissa minore dell'ascissa di C, tale che $\overline{PH} = \frac{12}{\sqrt{226}}$, essendo H la proiezione di P sulla retta BC.



Soluzione a

$9x^2 - y^2 + 9 = 0\,;\qquad \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = -1\,;$ si tratta di una iperbole riferita al centro con i fuochi sull'asse y .

$a^2 = 1\,;\qquad b^2 = 9\,.$

Il semiasse trasverso $b = 3$. Il semiasse non trasverso $a = 1$.

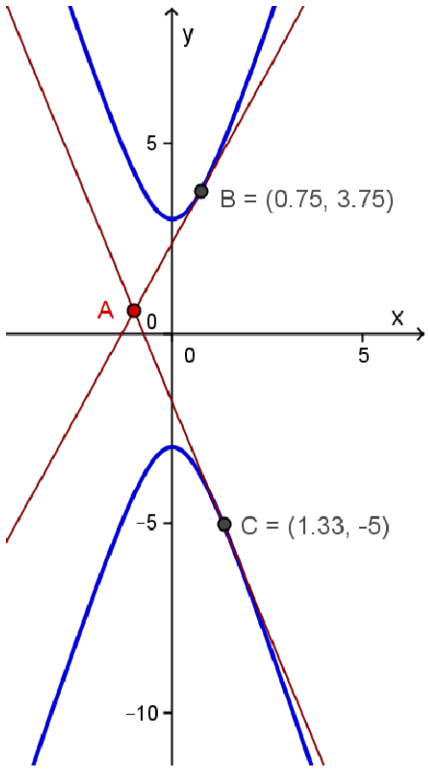
I vertici reali hanno coordinate: $V_1(0\,;3)$ e $V_2(0\,;-3)$.

Gli asintoti hanno equazioni: $y = \mp\frac{3}{1}x$.

Il grafico è rappresentato a lato.

Soluzione b

Le equazioni delle rette tangenti mandate dal punto A si ottengono imponendo nel sistema seguente la condizione di tangenza $\Delta = 0$:



$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 + 9 = 0 \\ y - y_A = m(x - x_A) \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - y^2 + 9 = 0 \\ y - \frac{3}{5} = m(x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 + 9 = 0 \\ y = mx + m + \frac{3}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - \left(mx + m + \frac{3}{5}\right)^2 + 9 = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - m^2x^2 - m^2 - \frac{9}{25} - 2m^2x - \frac{6}{5}mx - \frac{6}{5}m + 9 = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} (9 - m^2)x^2 - 2\left(m^2 + \frac{3}{5}m\right)x - \frac{6}{5}m - m^2 + \frac{216}{25} = 0 \\ - \end{cases}$$

Imponiamo la condizione di tangenza: $\frac{\Delta}{4} = 0\,;$

$$\left(m^2 + \frac{3}{5}m\right)^2 - (9 - m^2)\left(-\frac{6}{5}m - m^2 + \frac{216}{25}\right) = 0$$

$$m^4 + \frac{9}{25}m^2 + \frac{6}{5}m^3 + \frac{54}{5}m + 9m^2 - \frac{1944}{25} - \frac{6}{5}m^3 - m^4 + \frac{216}{25}m^2 = 0$$

$$\frac{9}{25}m^2 + \frac{54}{5}m + 9m^2 - \frac{1944}{25} + \frac{216}{25}m^2 = 0$$

$$9m^2 + 270m + 225m^2 - 1944 + 216m^2 = 0$$

$$450m^2 + 270m - 1944 = 0$$

$$25m^2 + 15m - 108 = 0$$

$$\Delta = 225 + 10800 = 11025$$

$m_{1,2} = \frac{-15 \mp 105}{50} = \begin{matrix} m_1 = -\frac{12}{5} \\ m_2 = +\frac{9}{5} \end{matrix}$ Pertanto le equazioni delle rette tangenti sono: $y = -\frac{12}{5}x - \frac{9}{5}$ e $y = \frac{9}{5}x + \frac{12}{5}$.

Soluzione c

Determiniamo le coordinate dei punti di tangenza:

$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 + 9 = 0 \\ y = \frac{9}{5}x + \frac{12}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - \left(\frac{9}{5}x + \frac{12}{5}\right)^2 + 9 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - \frac{81}{25}x^2 - \frac{144}{25} - \frac{216}{25}x + 9 = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 225x^2 - 81x^2 - 144 - 216x + 225 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 144x^2 - 216x + 81 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 16x^2 - 24x + 9 = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4x-3)^2 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - 3 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{5} = \frac{27}{20} + \frac{12}{5} = \frac{75}{20} = \frac{15}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad B\left(\frac{3}{4}; \frac{15}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 9x^2 - y^2 + 9 = 0 \\ y = -\frac{12}{5}x - \frac{9}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - \left(-\frac{12}{5}x - \frac{9}{5}\right)^2 + 9 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - \frac{144}{25}x^2 - \frac{81}{25} - \frac{216}{25}x + 9 = 0 \\ \end{cases}$$

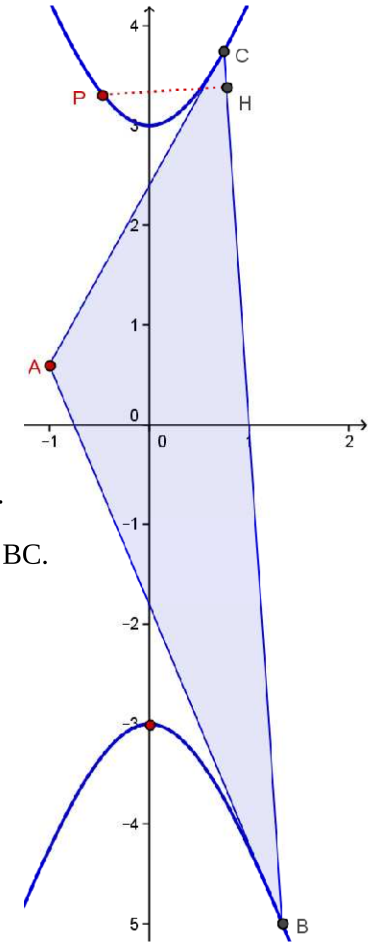
$$\begin{cases} 225x^2 - 144x^2 - 81 - 216x + 225 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 81x^2 - 216x + 144 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x^2 - 24x + 16 = 0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-4)^2 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4 = 0 \\ \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3} - \frac{9}{5} = -\frac{16}{5} - \frac{9}{5} = -5 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad C\left(\frac{4}{3}; -5\right)$$

$$S_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_B & y_A - y_B \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 - \frac{3}{4} & \frac{3}{5} - \frac{15}{4} \\ \frac{4}{3} - \frac{3}{4} & -5 - \frac{15}{4} \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{63}{20} \\ \frac{7}{12} & -\frac{35}{4} \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2}\left[-\frac{7}{4} \cdot \left(-\frac{35}{4}\right) - \frac{7}{12} \cdot \left(-\frac{63}{20}\right) \right] \right| = \left| \frac{1}{2}\left[\frac{245}{16} + \frac{441}{240} \right] \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2}\left[\frac{3675 + 441}{240} \right] \right| = \left| \frac{1}{2}\left[\frac{4416}{240} \right] \right| = \frac{4116}{480} = \frac{343}{40}.$$



Soluzione d

Nell'equazione dell'iperbole esplicitiamo l'incognita y:

$9x^2 - y^2 + 9 = 0$; $\qquad y^2 = 9x^2 + 9$; $\qquad y = \mp\sqrt{9x^2 + 9}$;

$y = \mp 3\sqrt{x^2 + 1}$

Il generico punto P con ordinata positiva ha coordinate: $P\left(k\,; +3\sqrt{k^2+1}\right)$ con $k < \frac{4}{3}$.

Per imporre la condizione: $\overline{PH} = \frac{12}{\sqrt{226}}$ occorre prima determinare l'equazione della retta BC.

$$\frac{y - y_C}{y_B - y_C} = \frac{x - x_C}{x_B - x_C}\,; \qquad \frac{y - \frac{15}{4}}{-5 - \frac{15}{4}} = \frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}\,; \qquad \frac{y - \frac{15}{4}}{-\frac{35}{4}} = \frac{x - \frac{3}{4}}{\frac{7}{12}}\,;$$

$$-\frac{4}{35}\left(y - \frac{15}{4}\right) = \frac{12}{7}\left(x - \frac{3}{4}\right); \qquad -\frac{4}{35}y + \frac{3}{7} = \frac{12}{7}x - \frac{9}{7}\,; \qquad -4y + 15 = 60x - 45\,;$$

$$60x + 4y - 60 = 0\,; \qquad 15x + y - 15 = 0$$

$$\frac{\left|15 \cdot k + 1 \cdot 3\sqrt{k^2+1} - 15\right|}{\sqrt{15^2 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{226}}\,; \qquad \frac{\left|15k + 3\sqrt{k^2+1} - 15\right|}{\sqrt{226}} = \frac{12}{\sqrt{226}}\,;$$

$$\left|15k + 3\sqrt{k^2+1} - 15\right| = 12\,;$$

$$15k + 3\sqrt{k^2+1} - 15 = \mp 12\,; \qquad \begin{matrix} 15k + 3\sqrt{k^2+1} - 15 = -12 \\ 15k + 3\sqrt{k^2+1} - 15 = +12 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3\sqrt{k^2+1} = 3 - 15k \\ 3\sqrt{k^2+1} = 27 - 15k \end{matrix}$$

Risolviamo prima l'equazione $3\sqrt{k^2+1} = 3 - 15k$

$$\sqrt{k^2+1} = 1 - 5k \qquad \begin{cases} 1 - 5k \geq 0 \\ k^2 + 1 = (1-5k)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{1}{5} \\ k^2 + 1 = 1 + 25k^2 - 10k \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{1}{5} \\ 24k^2 - 10k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \leq \dfrac{1}{5} \\ 2k(12k-5) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{1}{5} \\ k_1 = 0 \quad \mathit{Accettabile} \\ k_2 = \dfrac{5}{12} \quad \mathit{non\ Accettabile} \end{cases}$$

Risolviamo poi l'equazione $3\sqrt{k^2+1} = 27 - 15k$

$$\sqrt{k^2+1} = 9 - 5k \qquad \begin{cases} 9 - 5k \geq 0 \\ k^2 + 1 = (9-5k)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{9}{5} \\ k^2 + 1 = 81 + 25k^2 - 90k \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{9}{5} \\ 24k^2 - 90k + 80 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \leq \dfrac{9}{5} \\ 12k^2 - 45k + 40 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{9}{5} \\ \Delta = 2025 - 1920 = 105\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} k \leq \dfrac{9}{5} \\ k_3 = \dfrac{45 - \sqrt{105}}{24} \quad \mathit{Accettabile} \\ k_4 = \dfrac{45 + \sqrt{105}}{24} \quad \mathit{non\ Accettabile} \end{cases}$$

Dovendo essere però l'ascissa del punto P minore dell'ascissa di C, cioè $k < \frac{4}{3}$ la soluzione $k_3 = \frac{45-\sqrt{105}}{24}$ non è accettabile. L'unica soluzione accettabile è la soluzione $k_1 = 0$.

Pertanto il punto P richiesto ha coordinate $P\left(0\,; +3\sqrt{0^2+1}\right)$ cioè $P(0\,;\,3)$.