La funzione omografica
Esercizi

Esercizio 480.203

Traccia il grafico della curva di equazione: $y = \frac{6x+4}{3x-9}$

__Metodo 1 - Formule__

Le equazioni degli asintoti sono: $cx + d = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{a}{c}$ $\qquad 3x - 9 = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{6}{3}$ $\qquad x = 3 \quad \wedge \quad y = 2\,.$

Le coordinate del centro sono: $x_{O'} = -\frac{d}{c} = -\frac{-9}{3} = 3 \qquad y_{O'} = \frac{a}{c} = \frac{6}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad O'(3\,;2)$

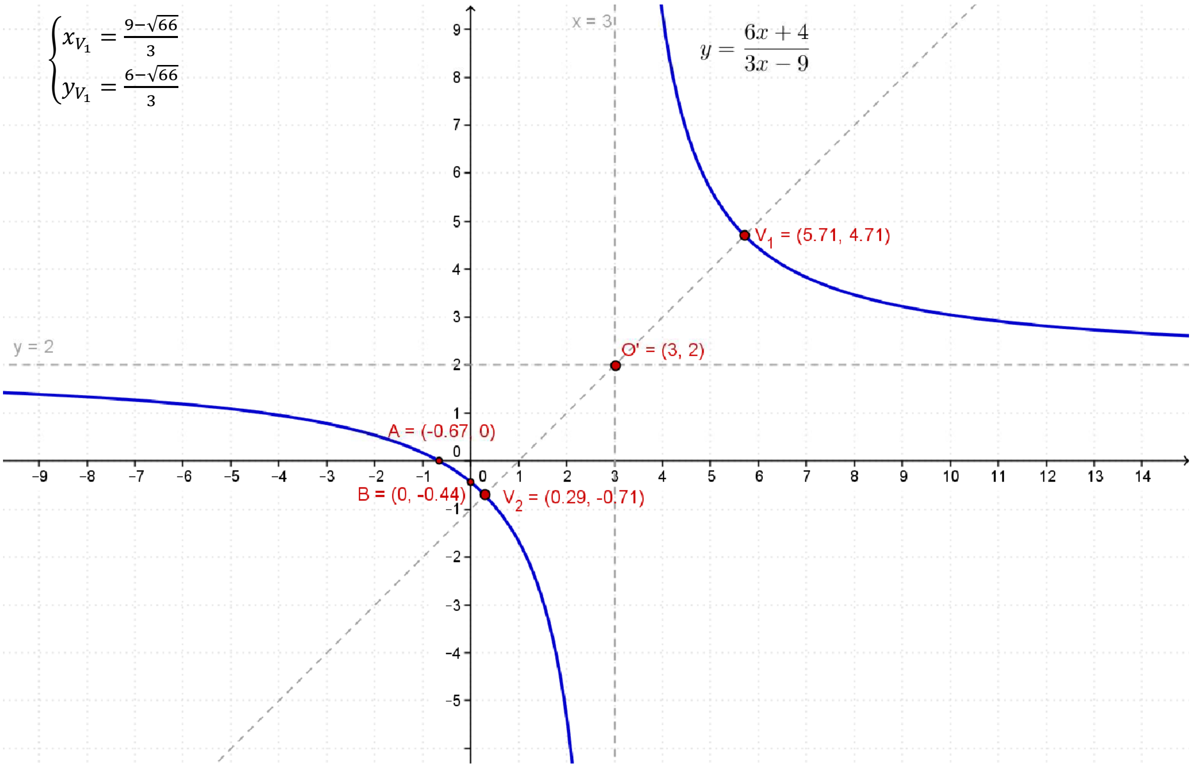
Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con gli assi:

$\begin{cases} y = \frac{6x+4}{3x-9} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{4}{9} \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(0\,;-\frac{4}{9}\right)$ $\qquad \begin{cases} y = \frac{6x+4}{3x-9} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x+4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B\left(-\frac{2}{3}\,;0\right)$

Per determinare le coordinate dei vertici occorre determinare l'equazione dell'asse trasverso: $y - 2 = 1(x-3)\,;$ $\quad y = x - 1$ ed in seguito determinare le sue intersezioni con l'equazione dell'iperbole.

$\begin{cases} y = \frac{6x+4}{3x-9} \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 1 = \frac{6x+4}{3x-9} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 9x - 3x + 9 = 6x + 4 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 18x + 5 = 0 \\ - \end{cases}$ $\qquad \Delta = 81 - 15 = 66\,; \quad x_{1,2} = \frac{9 \mp \sqrt{66}}{3}$

$\begin{cases} x_{V_1} = \frac{9+\sqrt{66}}{3} \\ y_{V_1} = \frac{6+\sqrt{66}}{3} \end{cases}$ $\quad e \quad$ $\begin{cases} x_{V_1} = \frac{9-\sqrt{66}}{3} \\ y_{V_1} = \frac{6-\sqrt{66}}{3} \end{cases}$



__Metodo 2 - Traslazione__

L'equazione $y = \frac{6x+4}{3x-9}$ è equivalente a:

$$\begin{array}{r|l} 6x + 4 & 3x - 9 \\ \cline{2-2} -6x + 18 & 2 \\ \cline{1-1} = \quad 22 & \end{array}$$

$y = 2 + \frac{22}{3x-9}\,; \qquad y - 2 = \frac{22}{3(x-3)}\,;$

$(y-2)(x-3) = \frac{22}{3}$

Si tratta di un'iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani.

Infatti applicando la traslazione di equazioni: $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$ si ottiene l'equazione $X \cdot Y = \frac{22}{3}$ con $k > 0$.

Gli assi hanno equazione: $x - 3 = 0$ e $y - 2 = 0$.

Il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate: $O'(3;2)$.

Esercizio 480.204

Traccia il grafico della curva di equazione: $y = \frac{2x-1}{4x+8}$

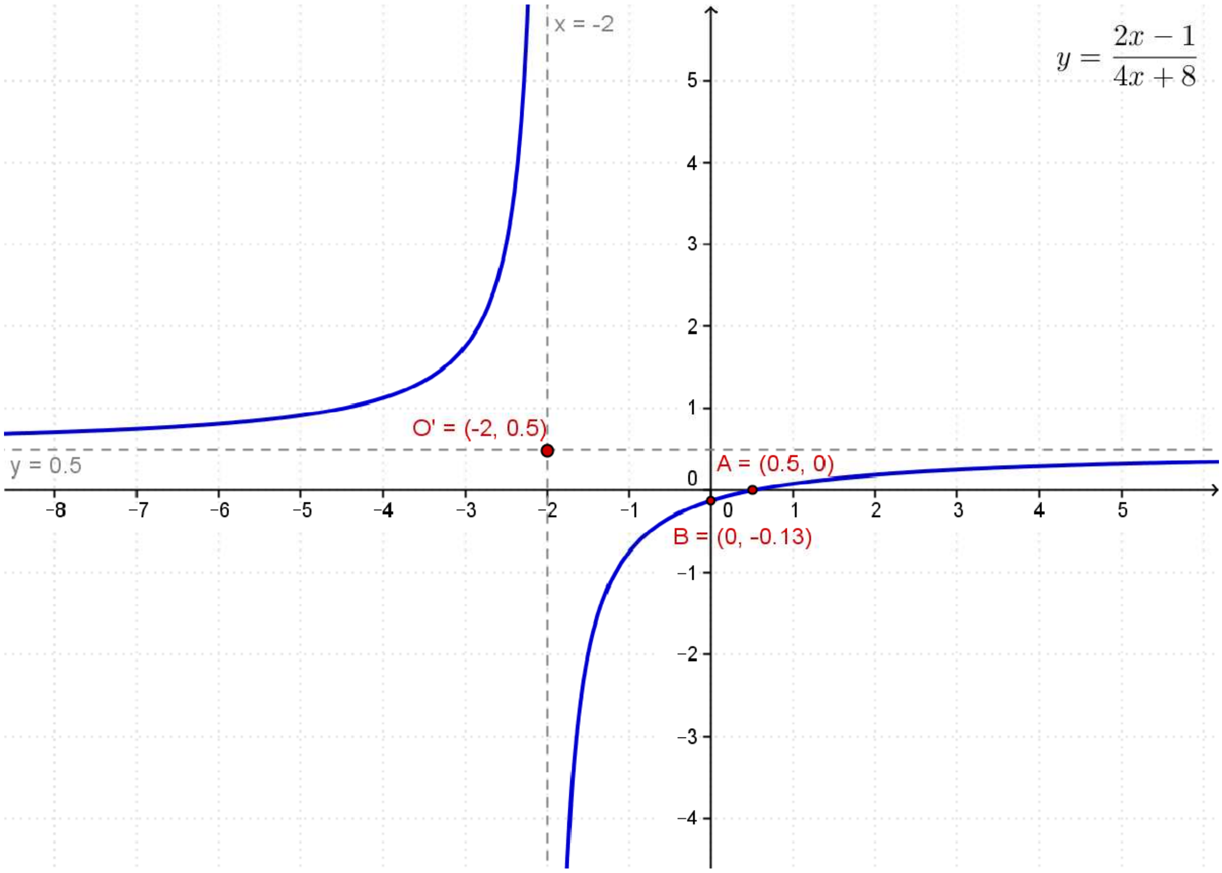
Metodo 1 - Formule

Le equazioni degli asintoti sono: $cx + d = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{a}{c}$ $\qquad 4x + 8 = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{2}{4}$ $\qquad x = -2 \quad \wedge \quad y = \frac{1}{2}$.

Le coordinate del centro sono: $x_{O'} = -\frac{d}{c} = -\frac{8}{4} = -2 \qquad y_{O'} = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad O'\left(-2\,;\,\frac{1}{2}\right)$

Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con gli assi:

$\begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{4x+8} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{1}{8} \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(0\,;-\frac{1}{8}\right)$ $\qquad \begin{cases} y = \dfrac{2x-1}{4x+8} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$



Metodo 2 - Traslazione

L'equazione $y = \frac{2x-1}{4x+8}$ è equivalente a:

$y = \frac{1}{2} - \frac{5}{4x+8}$; $\qquad y - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4(x+2)}$;

$\left(y - \frac{1}{2}\right)(x+2) = -\frac{5}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 2x - 1 & 4x + 8 \\ \hline -2x - 4 & \frac{1}{2} \\ \hline = \;\; -5 & \end{array}$$

Si tratta di un'iperbole equilatera con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani.

Infatti applicando la traslazione di equazioni: $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$ si ottiene l'equazione $X \cdot Y = -\frac{5}{4}$ con $k < 0$.

Gli assi hanno equazione: $x + 2 = 0$ e $y - \frac{1}{2} = 0$.

Il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate: $O'\left(-2;\,\frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 480.209

Traccia il grafico della curva di equazione: $2xy + x - y + 3 = 0$

Metodo 1 - Formule

L'equazione è equivalente a: $(2x-1)y = -x-3$; $\quad y = \frac{-x-3}{2x-1}$

Le equazioni degli asintoti sono: $cx + d = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{a}{c}$ $\quad 2x - 1 = 0 \quad \wedge \quad y = \frac{-1}{2}$ $\quad x = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad y = -\frac{1}{2}$.

Le coordinate del centro sono: $O'\left(\frac{1}{2}\,; -\frac{1}{2}\right)$

Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con gli assi:

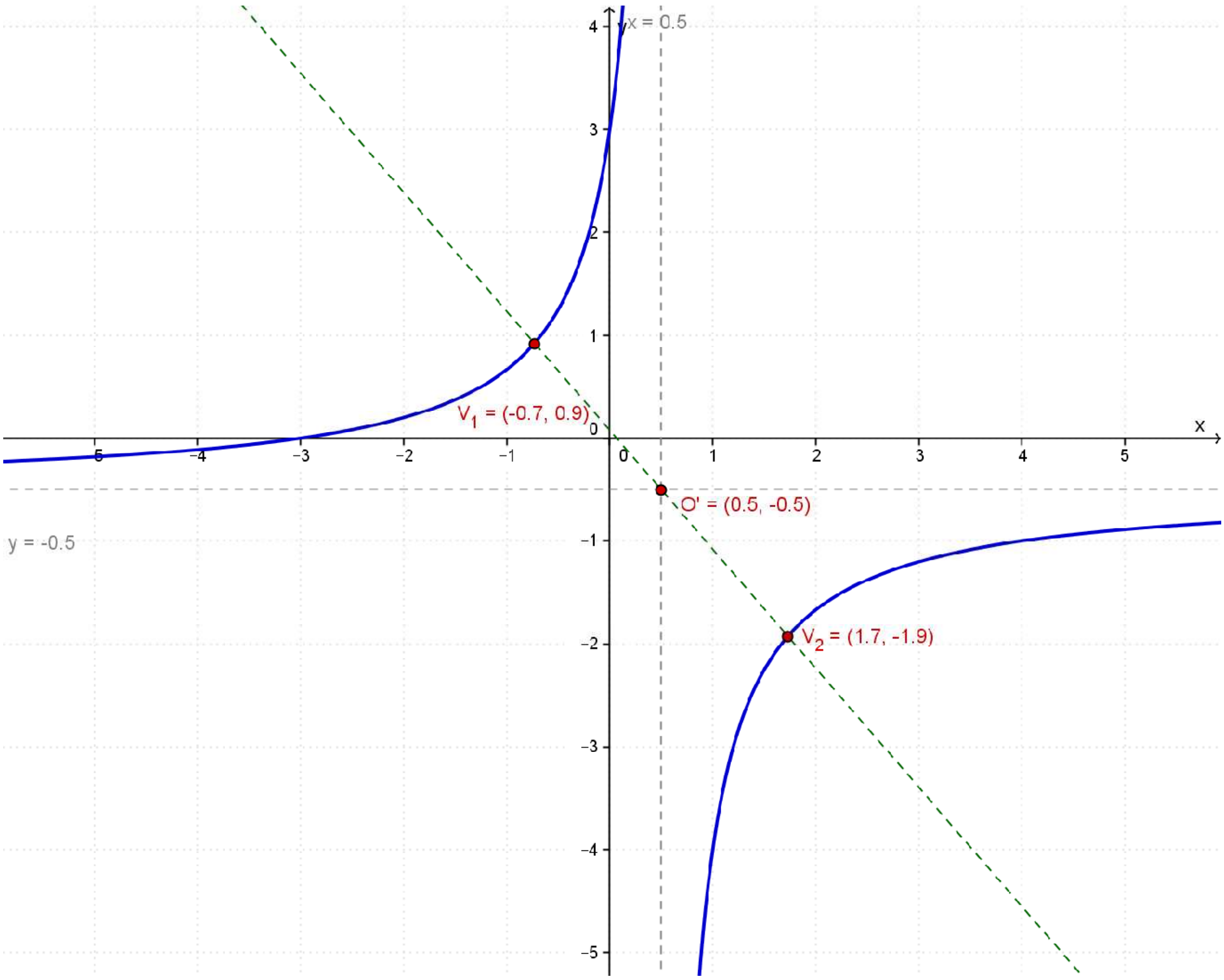
$\begin{cases} y = \dfrac{-x-3}{2x-1} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(0\,;\,3)$ $\qquad \begin{cases} y = \dfrac{-x-3}{2x-1} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x-3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(-3\,;\,0)$.

L'asse trasverso ha equazione: $y + \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right)$; $\quad y = -x$.

I vertici hanno coordinate:

$\begin{cases} y = \dfrac{-x-3}{2x-1} \\ y = -x \end{cases} \quad \begin{cases} -x = \dfrac{-x-3}{2x-1} \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} -2x^2 + x = -x - 3 \\ - \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 2x - 3 = 0 \\ - \end{cases} \quad \frac{\Delta}{4} = 1 + 6$

$\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{1 \mp \sqrt{6}}{2} \\ - \end{cases} \qquad V_1 \begin{cases} x_1 = \dfrac{1-\sqrt{6}}{2} \\ y_1 = \dfrac{\sqrt{6}-1}{2} \end{cases} \quad e \quad V_2 \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{6}}{2} \\ y_1 = \dfrac{\sqrt{6}+1}{2} \end{cases}$



Traccia il grafico della curva di equazione: $y = \frac{2|x|+6}{x-4}$

Metodo 1 - Formule

$$y = \frac{2|x|+6}{x-4} = \begin{cases} y = \dfrac{2x+6}{x-4} & se \;\; x \geq 0 \\ y = \dfrac{-2x+6}{x-4} & se \;\; x < 0 \end{cases}$$

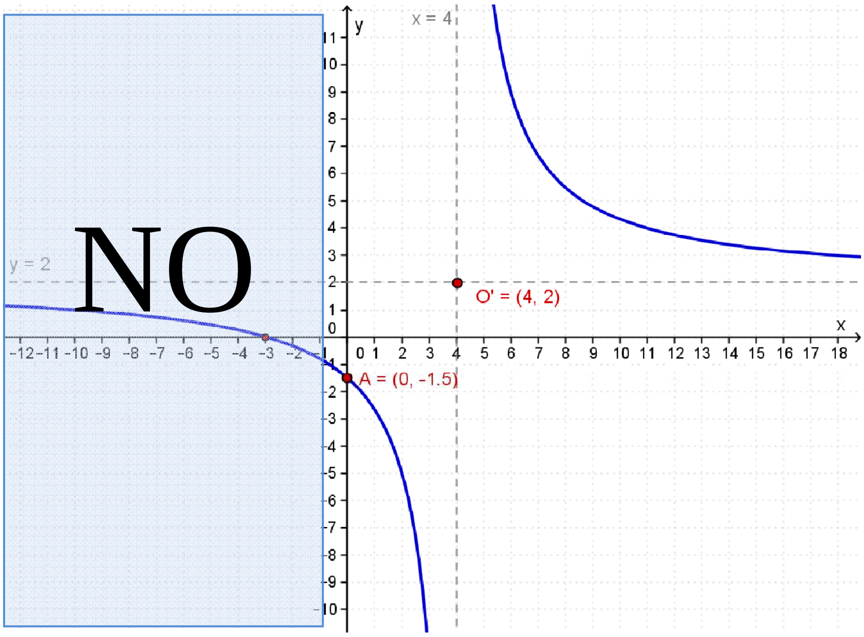
Tracciamo prima il grafico della funzione: $y = \frac{2x+6}{x-4}$ nell'intervallo $[0, +\infty[$

Le equazioni degli asintoti sono: $x = 4 \quad \wedge \quad y = 2$.

Le coordinate del centro sono: $O'(4\,;2)$

Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x+6}{x-4} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(0\,;-\frac{3}{2}\right) \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{2x+6}{x-4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(-3\,;\,0)\,.$$



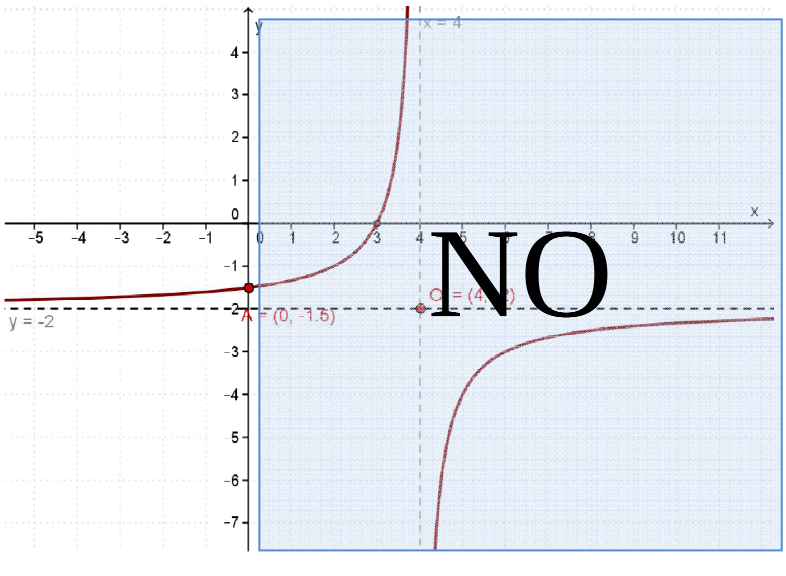
Tracciamo poi il grafico della funzione: $y = \frac{-2x+6}{x-4}$ nell'intervallo $]-\infty,\; 0[$

Le equazioni degli asintoti sono: $x = 4 \quad \wedge \quad y = -2$.

Le coordinate del centro sono: $O'(4\,;-2)$

Per tracciare il grafico dell'iperbole determiniamo alcuni suoi punti, come ad esempio le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-2x+6}{x-4} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\dfrac{3}{2} \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\left(0\,;-\frac{3}{2}\right) \qquad\qquad \begin{cases} y = \dfrac{-2x+6}{x-4} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(3\,;\,0)\,.$$



Riunendo i due grafici nei rispettivi domini si ottiene il grafico della funzione traccia.