Ellisse a centro *(F1 , F2 ∈ Asse x)*

L'equazione dell'ellisse a centro con i fuochi sull'asse delle x è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad con\ \ a>b$

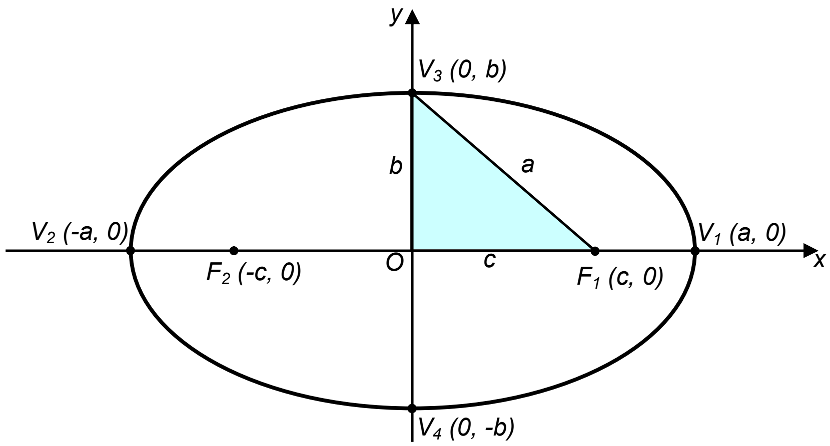
$Asse\ maggiore\ =\ 2a$

$Asse\ minore\ =\ 2b$

$Distanza\ focale\ =\ 2c$

$Eccentricità\ \ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

$a^2=b^2+c^2$



Ellisse a centro *(F1 , F2 ∈ Asse y)*

L'equazione dell'ellisse a centro con i fuochi sull'asse delle y è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad con\ \ a<b$

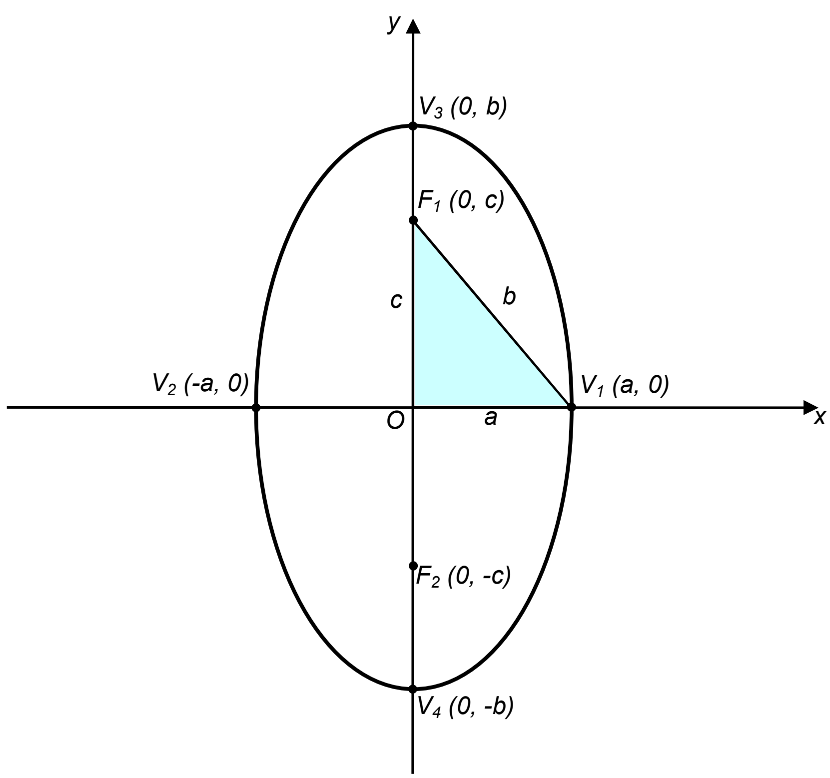
$Asse\ maggiore\ =\ 2b$

$Asse\ minore\ =\ 2a$

$Distanza\ focale\ =\ 2c$

$Eccentricità\ \ e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

$b^2=a^2+c^2$



TEOREMA

L'equazione di una ellisse con centro nel punto $O'(p\,;\,q)$ e assi paralleli agli assi cartesiani è del tipo :	$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Dimostrazione

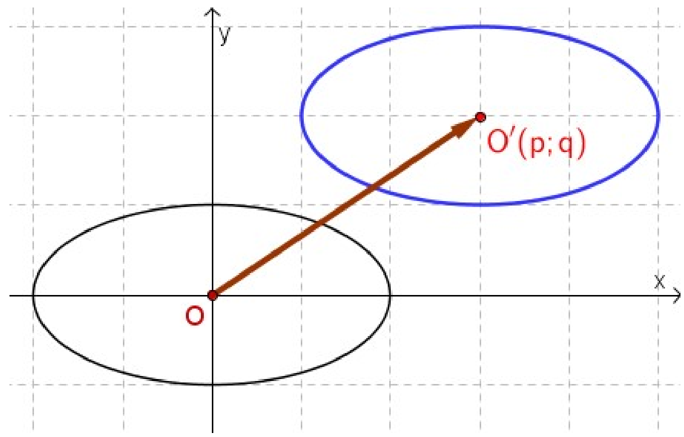
Consideriamo l'ellisse a centro di equazione : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Applichiamo la traslazione di vettore $\vec{v}\,(p\,,q)$ avente equazioni :

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

Sostituendo si ottiene:

$$\frac{(x'-p)^2}{a^2} + \frac{(y'-q)^2}{b^2} = 1$$



Eliminando gli apici, si ottiene l'equazione dell'ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani, di equazioni: $x = p$ e $y = q$, centro nel punto $O'(p\,;\,q)$,

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

vertici: $V_1\,(p+a;\; q)$ $\quad V_2\,(p-a;\; q)$

$V_3\,(p;\; q+b)$ $\quad V_4\,(p;\; q-b)$

fuochi: $F_1\,(p+c\,;q)$ *e* $F_2\,(p-c\,;q)$ *se* $a > b$

$F_1\,(p\,;q+c)$ *e* $F_2\,(p\,;q-c)$ *se* $a < b$

L'equazione ottenuta può essere riscritta anche in altra forma:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1\,;$$

$$\frac{x^2+p^2-2px}{a^2} + \frac{y^2+q^2-2qy}{b^2} = 1\,;$$

$$b^2\cdot(x^2+p^2-2px) + a^2\cdot(y^2+q^2-2qy) = a^2b^2\,;$$

$$b^2x^2 + b^2p^2 - 2b^2px + a^2y^2 + a^2q^2 - 2a^2qy - a^2b^2 = 0\,;$$

Ponendo : $\begin{cases} b^2 = A \\ a^2 = B \\ -2b^2p = C \\ -2a^2q = D \\ a^2q^2 + b^2p^2 - a^2b^2 = E \end{cases}$ *si ottiene :* $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

con $A > 0$ *e* $B > 0$

Infatti $A = b^2$ *e* $B = a^2$

TEOREMA INVERSO

Dimostriamo adesso il teorema inverso, cioè che:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ $con \quad A > 0 \quad e \quad B > 0$	*rappresenta l'equazione di una ellisse con gli assi paralleli agli assi cartesiani se* $\frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$

Dimostrazione

Consideriamo l'equazione: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Raccogliamo parzialmente: $A\left(x^2 + \frac{C}{A}x\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y\right) + E = 0$

Sommiamo e sottraiamo il quadrato della metà del coefficiente del termine di primo grado:

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{C^2}{4A^2} - \frac{C^2}{4A^2}\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y + \frac{D^2}{4B^2} - \frac{D^2}{4B^2}\right) + E = 0$$

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{C^2}{4A^2}\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}y + \frac{D^2}{4B^2}\right) - \frac{C^2}{4A} - \frac{D^2}{4B} + E = 0$$

$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$$

Ponendo $\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E$ *si ottiene* $A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \delta$

<u>*Distinguiamo tre casi:*</u>

1. *Se* $\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E > 0$ *Dividiamo i due membri per* δ

$$\frac{\left[x - \left(-\frac{C}{2A}\right)\right]^2}{\frac{\delta}{A}} + \frac{\left[y - \left(-\frac{D}{2B}\right)\right]^2}{\frac{\delta}{B}} = 1$$

   Essa rappresenta un'ellisse con centro di simmetria in $O'\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right)$ *assi di simmetria paralleli agli assi cartesiani e semiassi* $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ *e* $b = \sqrt{\frac{\delta}{B}}$.

2. *Se* $\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E = 0$ *si ottiene* $A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = 0$

   Essa rappresenta un punto: il centro di simmetria $O'\left(-\frac{C}{2A}\ ;\ -\frac{D}{2B}\right)$ *(ellisse degenere).*

3. *Se* $\delta = \frac{C^2}{4A} + \frac{D^2}{4B} - E < 0$ *l'equazione non rappresenta alcun punto reale.*