ELLISSE

Esercizi

Esercizio 443.205

Determina l'equazione dell'ellisse che nel suo punto di coordinate $\left(1\,;\,\sqrt{2}\right)$ ha per tangente la retta di equazione $y=-\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}$.

<u>*Soluzione*</u>

Applicando le formule di sdoppiamento, l'equazione della retta tangente all'ellisse nel punto $\left(1\,;\,\sqrt{2}\right)$ *è :* $\quad \dfrac{1\cdot x}{a^2}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot y}{b^2}=1$

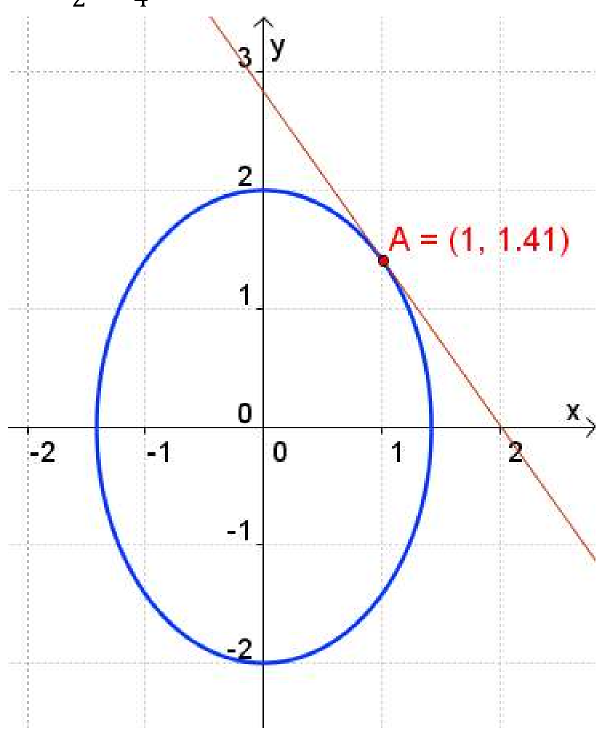
Confrontiamo le forme esplicite delle due equazioni della tangente:

$y=-\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}$	$\dfrac{1\cdot x}{a^2}+\dfrac{\sqrt{2}\cdot y}{b^2}=1\ ;\quad \dfrac{x}{a^2}+\dfrac{\sqrt{2}y}{b^2}=1\ ;$ $\dfrac{\sqrt{2}y}{b^2}=-\dfrac{x}{a^2}+1\,;\quad y=-\dfrac{x}{a^2}\cdot\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}\ ;$ $y=-\dfrac{b^2}{\sqrt{2}a^2}x+\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}\ .$

Pertanto deve risultare:

$$\begin{cases}-\dfrac{b^2}{\sqrt{2}a^2}=-\sqrt{2}\\ \dfrac{b^2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ b^2=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}---\\ b^2=4\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{2}a^2}=\sqrt{2}\\ ---\end{cases}\qquad \begin{cases}4=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}a^2\\ ---\end{cases}\qquad \begin{cases}a^2=2\\ b^2=4\end{cases}$$

L'equazione dell'ellisse richiesta è $\quad \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1\ .$



Esercizio 436.89

Rappresenta graficamente la seguente funzione: $y = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{4}{9} - x^2}$

<u>*Soluzione*</u>

Il dominio della funzione è: $D = \left\{x \in R \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right\}$.

Infatti: $\frac{4}{9} - x^2 \geq 0$; $\quad x^2 \leq \frac{4}{9}$; $\quad -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione : $\frac{2}{3}y = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2}$

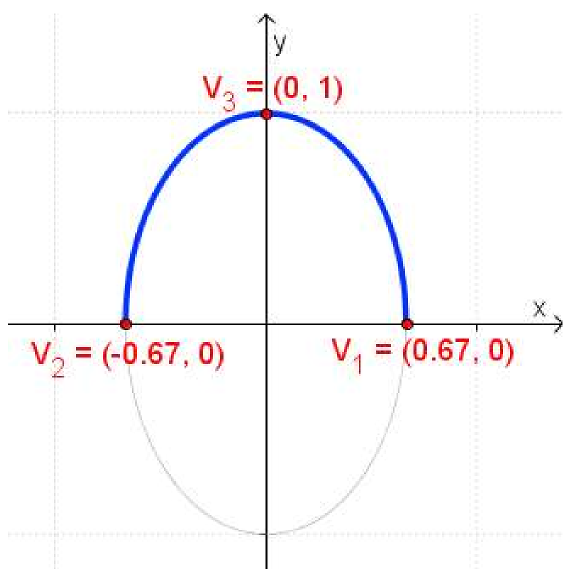
L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}y\right)^2 = \frac{4}{9} - x^2 \\ \frac{2}{3}y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + \frac{4}{9}y^2 = \frac{4}{9} \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{1} = 1 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Tracciamo il grafico dell'ellisse : $\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{1} = 1$

e consideriamo solo il ramo dell'ellisse che si trova nel semipiano positivo delle ordinate $(y \geq 0)$.

$\boldsymbol{V_1}\left(\frac{2}{3} ; \mathbf{0}\right) \qquad \boldsymbol{V_2}\left(-\frac{2}{3} ; 0\right) \qquad \boldsymbol{V_3}\,(\mathbf{0} ; 1) \qquad \boldsymbol{V_4}\,(\mathbf{0} ; -\mathbf{1})$.



Esercizio 436.90

Rappresenta graficamente la seguente funzione: $y = -\frac{2}{3}\sqrt{36 - x^2}$

<u>*Soluzione*</u>

Il dominio della funzione è: $D = \{x \in R \mid -6 \le x \le 6\}$.

Infatti: $36 - x^2 \ge 0$; $x^2 \le 36$; $-6 \le x \le 6$.

Isolando il radicale si ottiene la seguente equazione : $-\frac{3}{2}y = \sqrt{36 - x^2}$

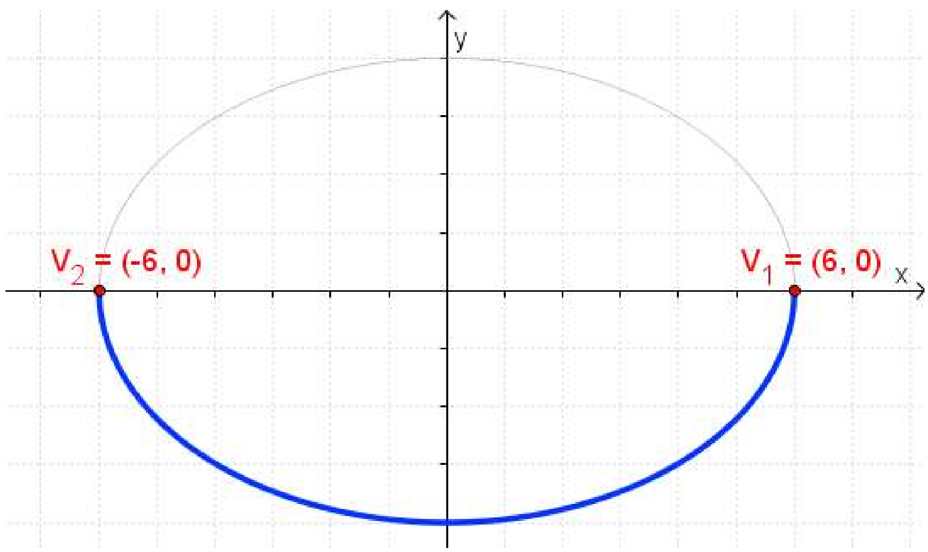
L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \left(-\frac{3}{2}y\right)^2 = 36 - x^2 \\ -\frac{3}{2}y \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + \frac{9}{4}y^2 = 36 \\ y \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \\ y \le 0 \end{cases}$$

Tracciamo il grafico dell'ellisse : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

e consideriamo solo il ramo dell'ellisse che si trova nel semipiano negativo delle ordinate $(y \le 0)$.

$\boldsymbol{V_1}\,(6\,;\,\mathbf{0})$ $\boldsymbol{V_2}\,(-6\,;0)$ $\boldsymbol{V_3}\,(\mathbf{0}\,;\,4)$ $\boldsymbol{V_4}\,(\mathbf{0}\,;\,-\mathbf{4})$.



Esercizio 417.106

Rappresenta l'ellisse di equazione: $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

$4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0$;

$4x^2 + 8x + 9y^2 + 18y + 12 = 0$;

$4(x^2 + 2x) + 9(y^2 + 2y) + 12 = 0$;

$4(x^2 + 2x + 1) + 9(y^2 + 2y + 1) + 12 - 4 - 9 = 0$;

$4(x + 1)^2 + 9(y + 1)^2 - 1 = 0$;

$$\frac{(x-(-1))^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y-(-1))^2}{\frac{1}{9}} = 1 \qquad \textit{che è della forma} \qquad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Gli assi sono : $x - p = 0 \quad \wedge \quad y - q = 0$

cioè : $x + 1 = 0 \quad \wedge \quad y + 1 = 0$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(p\,;q)$ *cioè* $O'(-1;-1)$.

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \wedge \quad b^2 = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad b = \frac{1}{3} \ .$$

I vertici hanno coordinate:

$V_1\ (p + a;\ q)$ $\qquad V_2\ (p - a;\ q)$ $\qquad V_3\ (p;\ q + b)$ $\qquad V_4\ (p;\ q - b)$

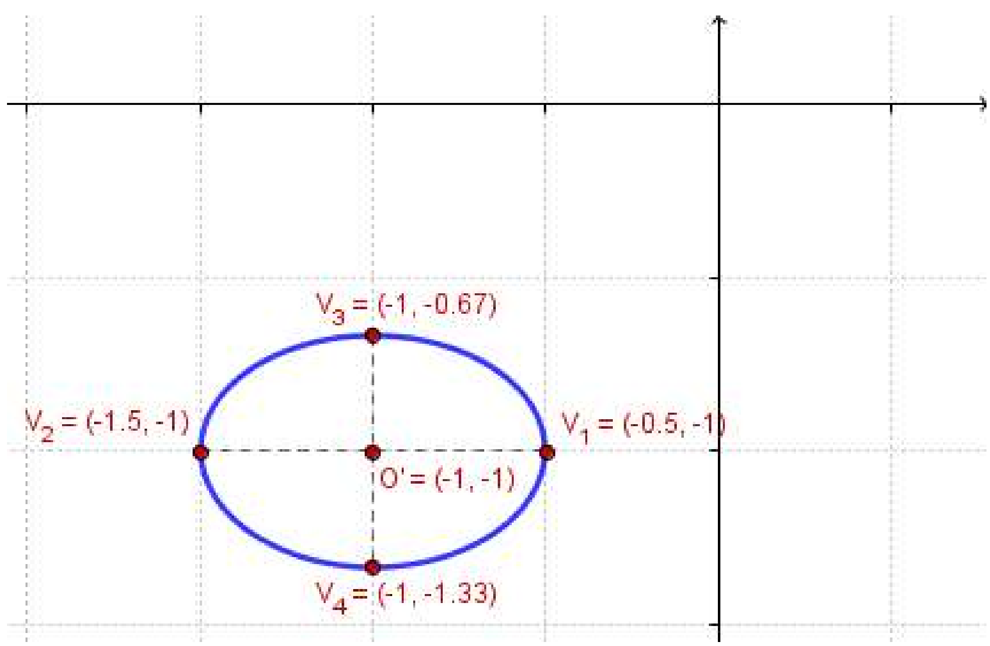
$\boldsymbol{V_1}\left(-1 + \frac{1}{2}\,;\,\boldsymbol{-1}\right)$ $\qquad \boldsymbol{V_2}\left(-1 - \frac{1}{2}\,;\boldsymbol{-1}\right)$ $\qquad \boldsymbol{V_3}\left(\boldsymbol{-1}\,;\,-1 + \frac{1}{3}\right)$ $\qquad \boldsymbol{V_4}\left(\boldsymbol{-1}\,;\,-1 - \frac{1}{3}\right)$ *cioè :*

$\boldsymbol{V_1}\left(-\frac{1}{2}\,;\,\boldsymbol{-1}\right)$ $\qquad \boldsymbol{V_2}\left(-\frac{3}{2}\,;-1\right)$ $\qquad \boldsymbol{V_3}\left(\boldsymbol{-1}\,;\,-\frac{2}{3}\right)$ $\qquad \boldsymbol{V_4}\left(\boldsymbol{-1}\,;\,-\frac{4}{3}\right)$.

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\sqrt{5}}{6} \cong 0{,}37$$

$$x_{F_1} = x_{O'} + c = -1 + \frac{\sqrt{5}}{6} \qquad \Rightarrow \qquad F_1\left(-1 + \frac{\sqrt{5}}{6} \ ;\ -1\right)$$

$$x_{F_2} = x_{O'} - c = -1 - \frac{\sqrt{5}}{6} \qquad \Rightarrow \qquad F_2\left(-1 - \frac{\sqrt{5}}{6} \ ;\ -1\right)$$



Metodo 2 - Formule

L'equazione $4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0$ *è del tipo* $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

Il centro di simmetria ha coordinate:

$x_{O'} = -\frac{C}{2A} = -\frac{8}{2 \cdot 4} = -1\ ;$ $\quad y_{O'} = -\frac{D}{2B} = -\frac{18}{2 \cdot 9} = -1$ $\quad \Rightarrow \quad O'\,(-1\,;-1)$

Gli assi hanno equazione: $x = -1$ *e* $y = -1$.

I vertici hanno coordinate:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_1\left(-\frac{1}{2};-1\right) \quad e \quad V_2\left(-\frac{3}{2};-1\right)$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 + 8x + 18y + 12 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_3\left(-1;-\frac{2}{3}\right) \quad e \quad V_4\left(-1;-\frac{4}{3}\right)$$

I semiassi maggiore e minore misurano, rispettivamente:

$$a = \overline{O'V_1} = \left|-\frac{1}{2}+1\right| = \frac{1}{2} \qquad e \qquad b = \overline{O'V_3} = \left|-\frac{2}{3}+1\right| = \frac{1}{3}$$

La semidistanza focale:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9-4}{36}} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

I fuochi hanno coordinate:

$$F_1\left(-1 + \frac{\sqrt{5}}{6}\ ;\ -1\right) \qquad e \qquad F_2\left(-1 - \frac{\sqrt{5}}{6}\ ;\ -1\right)$$

Esercizio 417.100

Rappresenta l'ellisse di equazione: $\mathbf{9x^2 + y^2 - 6y = 0}$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

$9x^2 + y^2 - 6y = 0$;

$9x^2 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0$;

$9x^2 + (y-3)^2 = 9$;

$\frac{x^2}{1} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ $\qquad$ *che è della forma* $\qquad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

Gli assi sono : $x - p = 0 \quad \wedge \quad y - q = 0$

cioè : $\quad x = 0 \quad \wedge \quad y - 3 = 0$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(p\,;\,q)$ *cioè* $O'(0\,;3)$.

$a^2 = 1 \quad \wedge \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \quad \wedge \quad b = 3$.

I vertici hanno coordinate:

$V_1\,(p+a;\ q) \qquad V_2\,(p-a;\ q) \qquad V_3\,(p;\ q+b) \qquad V_4\,(p;\ q-b)$

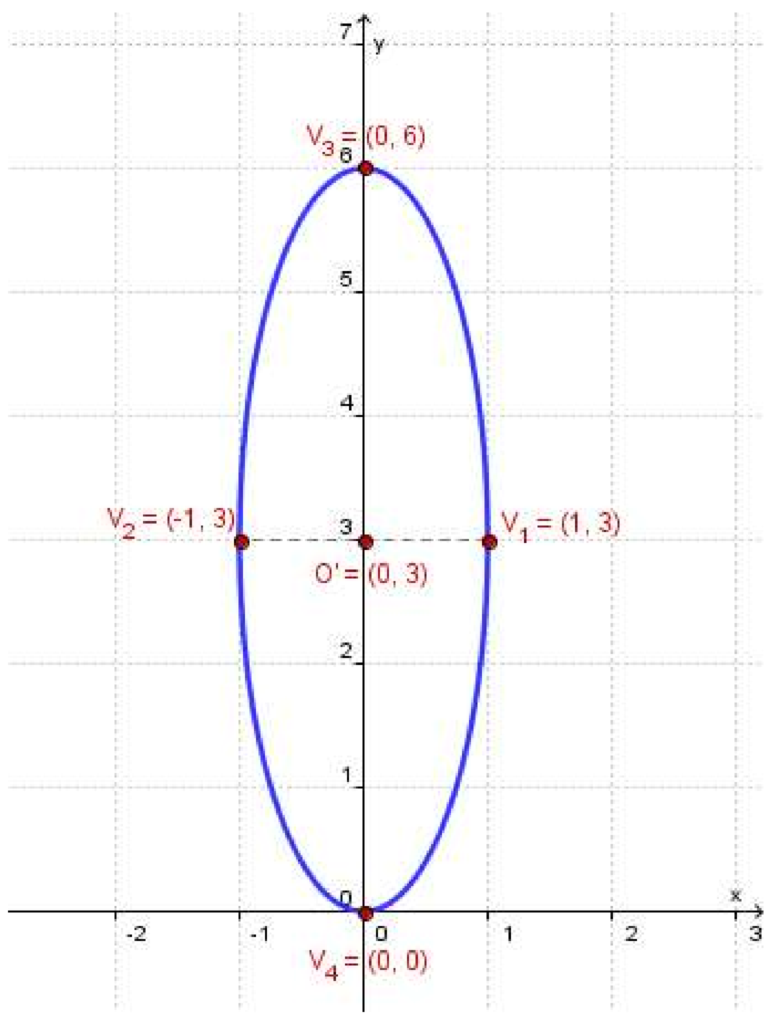
$\boldsymbol{V_1}\,(0+1\,;\,\mathbf{3}) \qquad \boldsymbol{V_2}\,(0-1\,;\,3) \qquad \boldsymbol{V_3}\,(\mathbf{0}\,;\,3+3) \qquad \boldsymbol{V_4}\,(0\,;\,3-3)$ *cioè*

$\boldsymbol{V_1}\,(1\,;\,\mathbf{3}) \qquad \boldsymbol{V_2}\,(-1\,;\,3) \qquad \boldsymbol{V_3}\,(\mathbf{0}\,;\,6) \qquad \boldsymbol{V_4}\,(\mathbf{0}\,;\,0)$.

$c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 1 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$y_{F_1} = y_{O'} + c = 3 + 2\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad F_1\big(0\,;\,3+2\sqrt{2}\big)$

$y_{F_2} = y_{O'} - c = 3 - 2\sqrt{2} \qquad \Rightarrow \qquad F_1\big(0\,;\,3-2\sqrt{2}\big)$



Esercizio 417.101

Rappresenta l'ellisse di equazione: $4\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}+\boldsymbol{8x}=\boldsymbol{0}$

<u>Metodo 1 - Completamento del quadrato</u>

$4\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{y^2}+\boldsymbol{8x}=\boldsymbol{0}$;

$4(\boldsymbol{x^2}+\boldsymbol{2x}+\boldsymbol{1})+\boldsymbol{y^2}-\boldsymbol{4}=\boldsymbol{0}$;

$4(x+1)^2+y^2=4$;

$\dfrac{(x+1)^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1 \qquad che\ è\ della\ forma \qquad \dfrac{(x-p)^2}{a^2}+\dfrac{(y-q)^2}{b^2}=1$

Gli assi sono : $x-p=0 \quad \wedge \quad y-q=0$

cioè : $x+1=0 \quad \wedge \quad y=0$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(p\,;\,q)$ *cioè* $O'(-1\,;0)$.

$a^2=1 \quad \wedge \quad b^2=4 \quad \Rightarrow \quad a=1 \quad \wedge \quad b=2$.

I vertici hanno coordinate:

$V_1\ (p+a;\ q) \qquad V_2\ (p-a;\ q) \qquad V_3\ (p;\ q+b) \qquad V_4\ (p;\ q-b)$

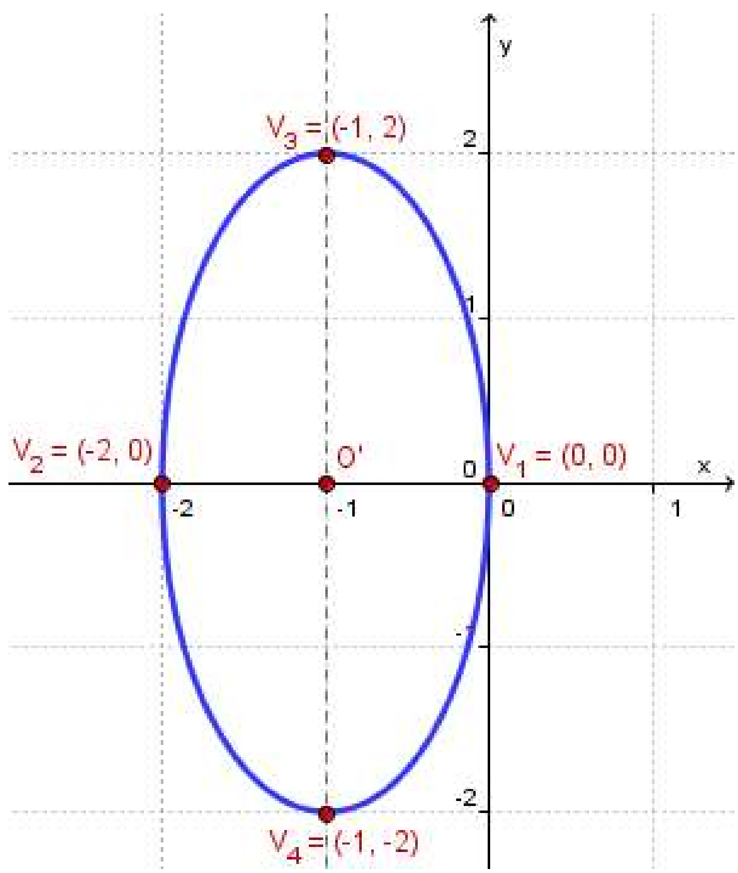
$\boldsymbol{V_1}\ (-1+1\,;\ \boldsymbol{0}) \qquad \boldsymbol{V_2}\ (-1-1\,;\ 0) \qquad \boldsymbol{V_3}\ (\boldsymbol{-1}\,;\ 0+2) \qquad \boldsymbol{V_4}\ (-1\,;\ 0-2)$ *cioè*

$\boldsymbol{V_1}\ (0\,;\ \boldsymbol{0}) \qquad \boldsymbol{V_2}\ (-2\ ;\ 0) \qquad \boldsymbol{V_3}\ (\boldsymbol{-1}\,;\ 2) \qquad \boldsymbol{V_4}\ (-1\,;\ -2)$.

$c^2=b^2-a^2=4-1=3 \qquad \Rightarrow \qquad c=\sqrt{3}$

$y_{F_1}=y_{O'}+c=0+\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad F_1(-1\,;\ +\sqrt{3})$

$y_{F_2}=y_{O'}-c=0-\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad F_2(-1\,;\ -\sqrt{3})$



Esercizio 417.102

Rappresenta l’ellisse di equazione: $25\boldsymbol{x^2+9y^2-100x-18y-116}$

Metodo 1 - Completamento del quadrato

$25\boldsymbol{x^2+9y^2-100x-18y-116} =$;

$25\boldsymbol{x^2-100x+9y^2-18y-116} =$;

$25\boldsymbol{(x^2-4x)+9(y^2-2y)-116=0}$;

$25\boldsymbol{(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)-116=100}+$;

$25(x-2)^2+9(y-1)^2=225$;

$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1 \qquad che\ è\ della\ forma \qquad \frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$

Gli assi sono : $x-p=0 \quad \wedge \quad y-q=0$

cioè : $x-2=0 \quad \wedge \quad y-1=0$.

Il centro di simmetria ha coordinate: $O'(p\,;\,q)$ *cioè* $O'(2\,;1)$.

$a^2=9 \quad \wedge \quad b^2=25 \quad \Rightarrow \quad a=3 \quad \wedge \quad b=5$.

I vertici hanno coordinate:

$V_1\ (p+a;\ q) \qquad V_2\ (p-a;\ q) \qquad V_3\ (p;\ q+b) \qquad V_4\ (p;\ q-b)$

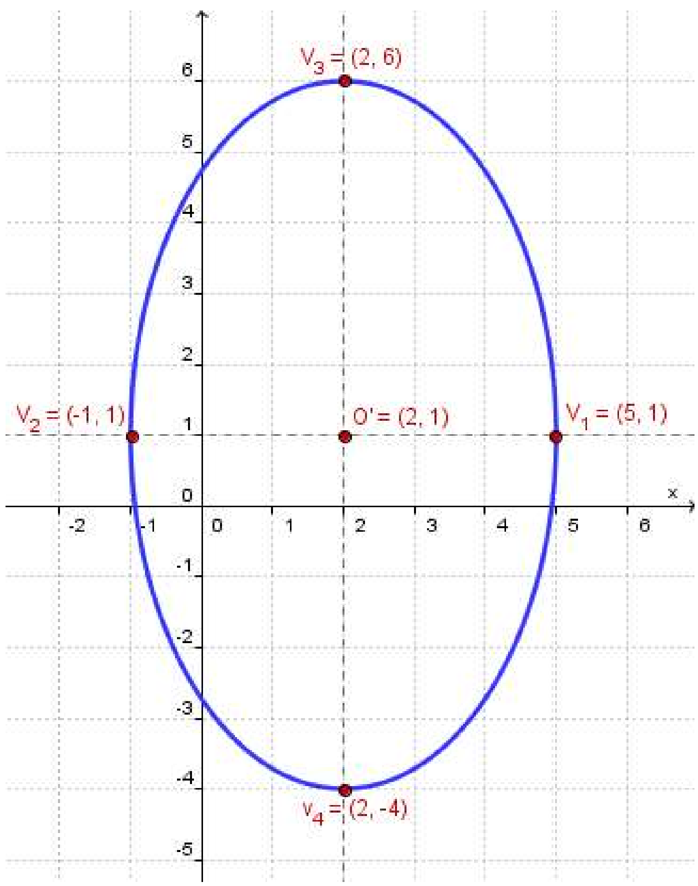
$\boldsymbol{V_1}\ (2+3\,;\ \boldsymbol{1}) \qquad \boldsymbol{V_2}\ (2-3\,;\ 1) \qquad \boldsymbol{V_3}\ (\boldsymbol{2}\,;\ 1+5) \qquad \boldsymbol{V_4}\ (2\,;\ 1-5)$ *cioè*

$\boldsymbol{V_1}\ (5\,;\ \boldsymbol{1}) \qquad \boldsymbol{V_2}\ (-1\ ;\ 1) \qquad \boldsymbol{V_3}\ (\boldsymbol{2}\,;\ \boldsymbol{6}) \qquad \boldsymbol{V_4}\ (2\,;\ -4)$.

$c^2=b^2-a^2=25-9=16 \qquad \Rightarrow \qquad c=\sqrt{16}=4$

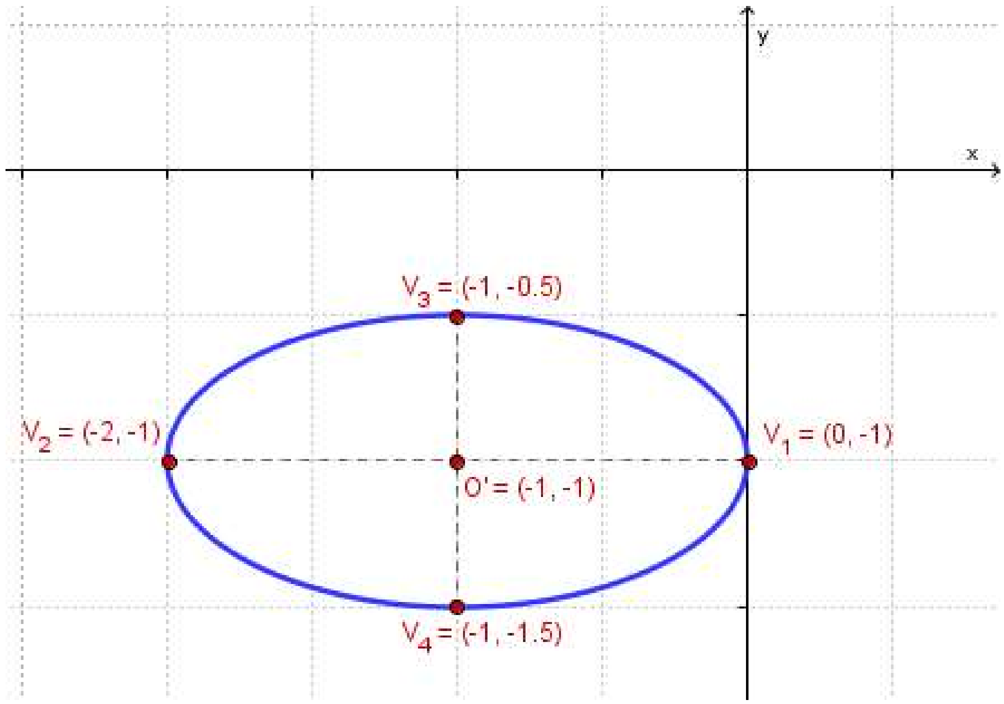
$y_{F_1}=y_{O'}+c=1+4=5 \qquad \Rightarrow \qquad F_1(2\,;\ +5)$

$y_{F_2}=y_{O'}-c=1-4=-3 \qquad \Rightarrow \qquad F_2(2\,;\ -3)$



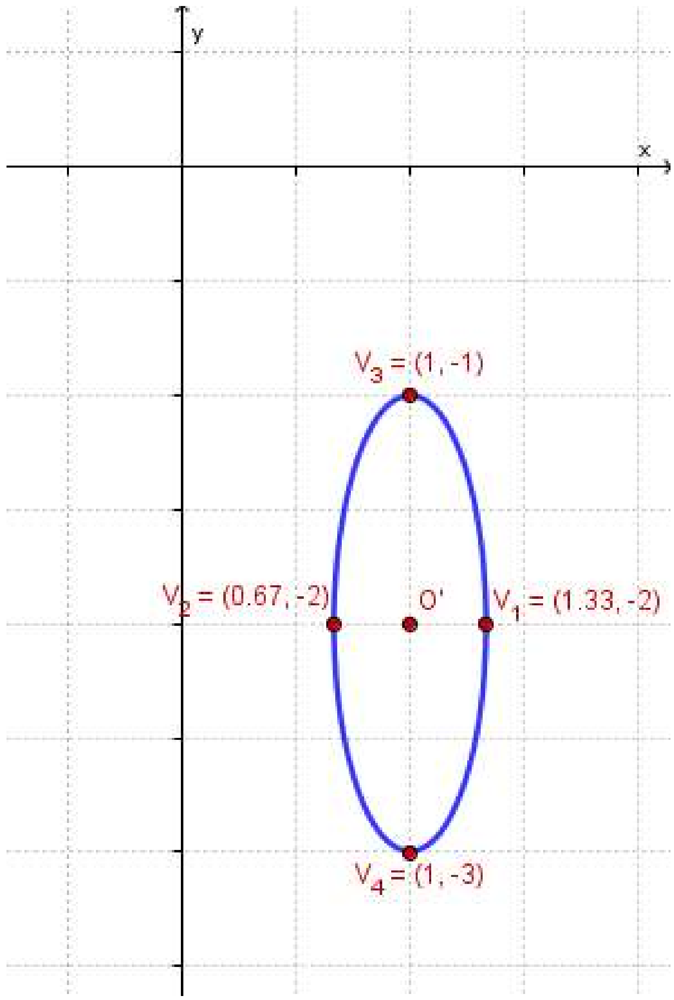
Esercizio 417.103

Rappresenta l'ellisse di equazione: $\boldsymbol{x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 4 =}$



Esercizio 417.104

Rappresenta l'ellisse di equazione: $\boldsymbol{9x^2 + y^2 - 18x + 4y + 12 = 0}$



Esercizio 417.105

Rappresenta l'ellisse di equazione: $2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 4\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 2 =$