

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2016

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Questionario

Quesito 1

È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Stabilire se il numero reale u , tale che

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx$$

Soluzione

La funzione integranda $f(x) = e^{-x^2}$ è una funzione definita, continua e positiva in tutto $\mathbb{R}$ (funzione gaussiana).

Inoltre la funzione è **pari**. Infatti: $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$.

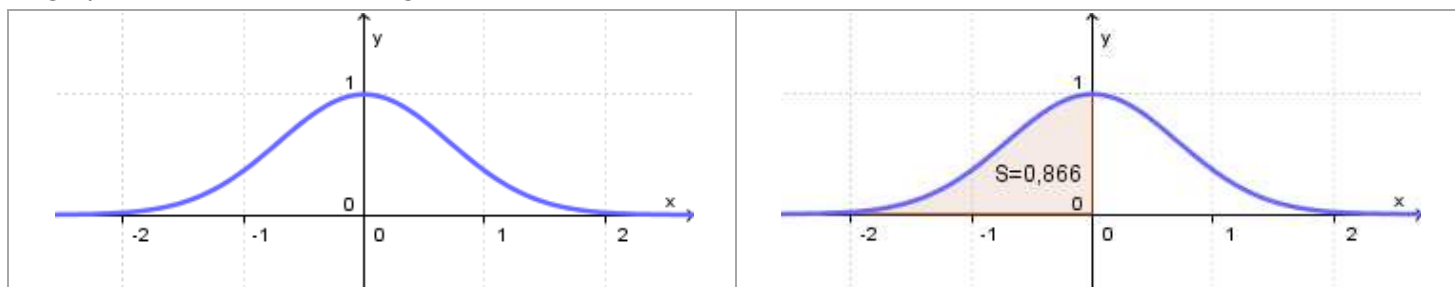
$$f(0) = e^{-0^2} = 1$$

L'asse delle x è un asintoto orizzontale. Infatti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$f'(x) > 0$ per $x < 0$	$f'(x) < 0$ per $x > 0$	$f'(x) = 0$ per $x = 0$
crescente	decrescente	Massimo assoluto

Il grafico indicativamente è il seguente:



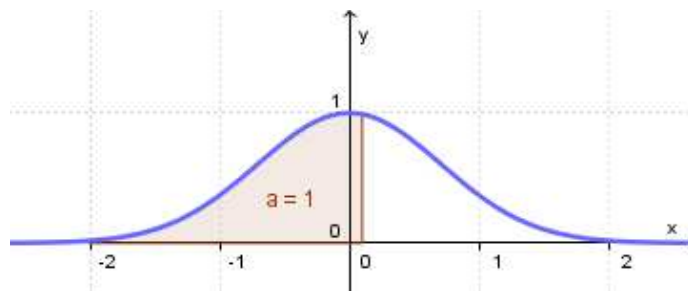
La funzione integrale $F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ è monotona crescente in tutto $\mathbb{R}$. Infatti: $F'(x) = f(x) = e^{-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Essendo la funzione pari:

$$F(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cong 0,866$$

$$F(u) = 1$$

Si conclude quindi che $u > 0$.



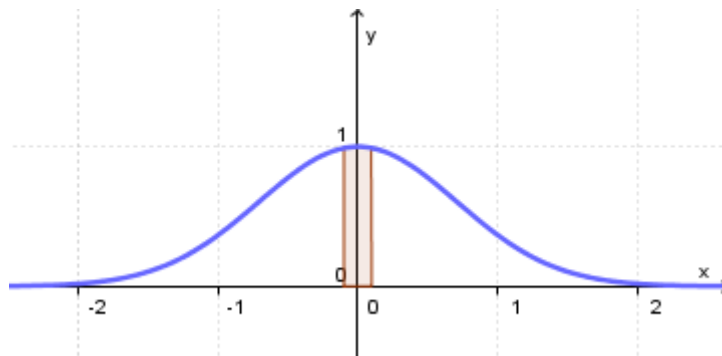
Calcolo dell'integrale A

La funzione $g(x) = x^7 e^{-x^2}$ è **dispari**. Infatti: $f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-x^2} = -f(x)$.

$$\text{Pertanto} \quad A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx = \int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx + \int_0^u x^7 e^{-x^2} dx = \int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx - \int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx = 0$$

Calcolo dell'integrale B

$$\begin{aligned} B &= \int_{-u}^u e^{-x^2} dx = 2 \cdot \left[\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx \right] = \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) = 2 - \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$



Calcolo dell'integrale C

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx$$

Effettuando la sostituzione $\sqrt{5}x = z$ si ottiene:

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}z \quad e \quad dx = \frac{1}{\sqrt{5}} dz \quad \text{Inoltre} \quad [se \ x \rightarrow +\infty \Rightarrow z \rightarrow +\infty] \quad e \quad [se \ x \rightarrow -\infty \Rightarrow z \rightarrow -\infty]$$

Si ricava:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \frac{1}{\sqrt{5}} dz = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{5\pi}}{5}.$$

Quesito 2

Data una parabola di equazione

$$y = 1 - ax^2, \quad \text{con } a > 0$$

si vogliono inscrivere dei rettangoli, con un lato sull'asse x , nel segmento parabolico delimitato dall'asse x . Determinare a in modo tale che il rettangolo di area massima sia anche il rettangolo di perimetro massimo.

Soluzione

Essendo $a > 0$ la parabola rivolge la concavità verso il basso.

Ha il vertice in $V(0; 1)$.

Interseca l'asse delle x nei punti:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right) \quad e \quad Q\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}; 0\right)$$

Indichiamo con $k > 0$ l'ascissa del punto A

con $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$.

I vertici del rettangolo inscritto nel segmento parabolico sono:

$$\begin{array}{ll} A(k; 0) & B(k; 1 - ak^2) \\ D(-k; 0) & C(-k; 1 - ak^2) \end{array}$$

Casi limiti:

$k = 0 \rightarrow A \equiv D \wedge B \equiv C \rightarrow$ il rettangolo degenera nel segmento OR con $S = 0 \wedge p = 2$.

$k = \frac{1}{\sqrt{a}} \rightarrow A \equiv B \wedge C \equiv D \rightarrow$ il rettangolo degenera nel segmento PQ con $S = 0 \wedge p = \frac{2}{\sqrt{a}}$.

L'area del rettangolo è espressa dalla funzione: $S(k) = \overline{AD} \cdot \overline{AB} = 2k \cdot (1 - ak^2) = 2k - 2ak^3$

$$S'(k) = 2 - 6ak^2.$$

$$S'(k) \geq 0; \quad 2 - 6ak^2 \geq 0; \quad k^2 \leq \frac{1}{3a}; \quad -\sqrt{\frac{1}{3a}} \leq k \leq \sqrt{\frac{1}{3a}}$$

$$S'(k) < 0; \quad k < -\sqrt{\frac{1}{3a}} \vee k > \sqrt{\frac{1}{3a}}$$

Ma essendo $0 < k < \frac{1}{\sqrt{a}}$ si ha:

$S'(k) > 0$ per $0 < k < \sqrt{\frac{1}{3a}}$	$S'(k) < 0$ per $\sqrt{\frac{1}{3a}} < k < \frac{1}{\sqrt{a}}$	$S'(k) = 0$ per $k = \sqrt{\frac{1}{3a}}$
crescente	decrescente	Massimo assoluto

Il perimetro del rettangolo è espresso dalla funzione:

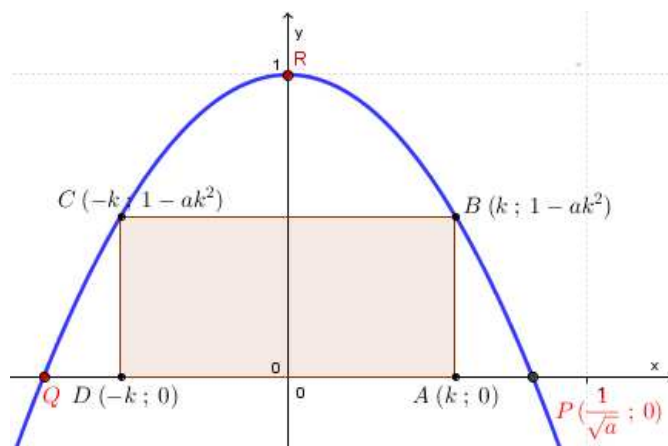
$$p(k) = 2(\overline{AD} + \overline{AB}) = 2 \cdot [2k + (1 - ak^2)] = -2ak^2 + 4k + 2$$

Trattandosi di una parabola con concavità negativa, il massimo si ha in corrispondenza dell'ascissa del vertice.

$$k = x_V = -\frac{4}{-2 \cdot 2a} = \frac{1}{a}$$

Imponendo la coesistenza delle due condizioni si ha:

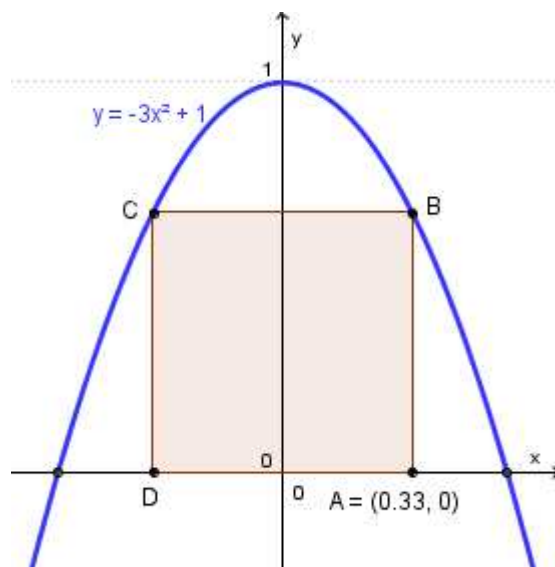
$$\begin{cases} k = \sqrt{\frac{1}{3a}} \\ k = \frac{1}{a} \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1}{3a}} = \frac{1}{a} \\ \sqrt{3a} = a \end{array} \right. \quad \begin{cases} 3a = a^2 \\ a^2 - 3a = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 & \text{non accettabile} \\ a = 3 & \text{accettabile} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$$



L'equazione della parabola che soddisfa le condizioni del problema è $y = 1 - 3x^2$.

Il rettangolo di area massima e perimetro massimo è il quadrato di lato $\overline{AB} = \frac{2}{3}$. Infatti:

$$\overline{AD} = 2k = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad e \quad \overline{AB} = 1 - ak^2 = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$



Nota

Più complicata è la ricerca del rettangolo di perimetro massimo con lo studio del segno della derivata prima. Infatti:

$$p(k) = -2ak^2 + 4k + 2$$

$$p'(k) = -4ak + 4$$

$$p'(k) > 0; \quad -4ak + 4 > 0; \quad ak - 1 < 0; \quad k < \frac{1}{a}.$$

Dovendo studiare la funzione $p(k)$ nell'intervallo $(0; \frac{1}{\sqrt{a}})$ è importante sapere se $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$.

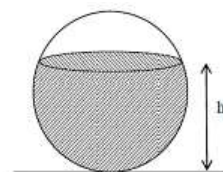
Se $a > 1$ allora $\frac{1}{a} < \frac{1}{\sqrt{a}}$. Esempio: $\frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{4}}$

Se $0 < a \leq 1$ allora $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{a}}$. Esempio: $\frac{1}{0,25} > \frac{1}{\sqrt{0,25}}$ Infatti: $\frac{1}{0,25} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ $\frac{1}{\sqrt{0,25}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \sqrt{4} = 2$.

Se $a > 1$	Se $0 < a \leq 1$
$p'(k) > 0$ per $0 < k < \frac{1}{a}$	$p'(k) > 0$ per $0 \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$
$p'(k) < 0$ per $\frac{1}{a} < k < \frac{1}{\sqrt{a}}$	$p'(k) < 0$ mai
Massimo assoluto per $k = \frac{1}{a}$	Il valore $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$ non è accettabile perché per $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$ il rettangolo degenera nel segmento AD di area nulla.

Quesito 3

Un recipiente sferico con raggio interno r è riempito con un liquido fino all'altezza h . Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare che il volume del liquido è dato da: $V = \pi \cdot (rh^2 - \frac{h^3}{3})$.



Soluzione 1

Ponendo $\overline{BH} = x$ con $0 < x < 2r$ si ha: $\overline{AH} = 2r - x$.

Applicando il II T. di Euclide al triangolo rettangolo ABC (inscritto in una semicirconferenza) si ottiene:

$$\overline{HC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} = (2r - x) \cdot x = 2rx - x^2.$$

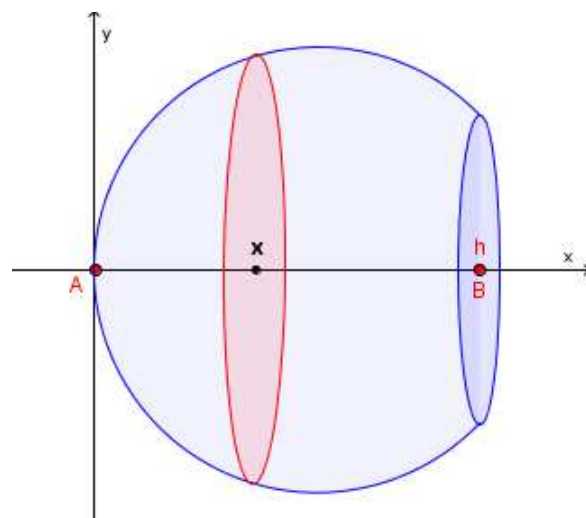
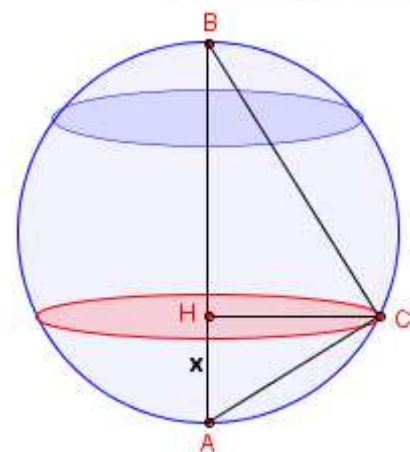
L'area della superficie del liquido in funzione dell'altezza x è

$$S(x) = \pi \cdot \overline{HC}^2 = \pi (2rx - x^2).$$

Consideriamo l'asse della sfera AB coincidente con l'asse delle x e il Vertice A coincidente con l'origine degli assi cartesiani.

Il volume del liquido di altezza h è:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b S(x) dx = \int_0^h \pi (2rx - x^2) dx = \\ &= \pi \int_0^h (2rx - x^2) dx = \pi \cdot \left[rx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \\ &= \pi \cdot \left[rh^2 - \frac{h^3}{3} - \left(r \cdot 0^2 - \frac{0^3}{3} \right) \right] = \\ &= \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right). \end{aligned}$$



Soluzione 2

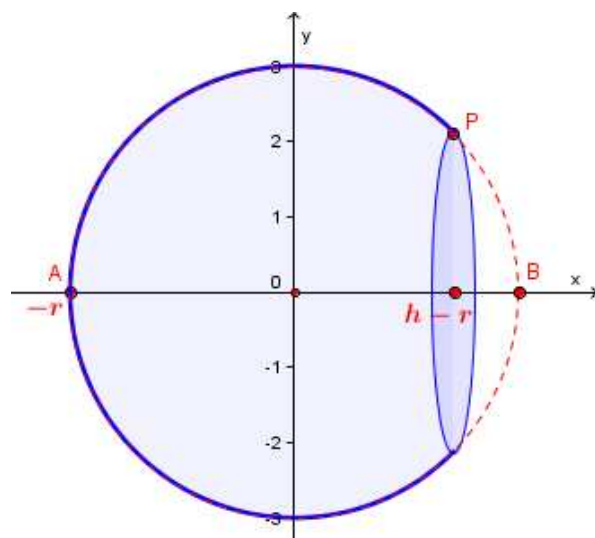
Il volume della calotta sferica si ottiene dalla rotazione completa dell'arco AP lungo l'asse AB.

La circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = r^2$

L'equazione dell'arco AP è $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Il volume della calotta sferica con altezza h è:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-r}^{h-r} [\sqrt{r^2 - x^2}]^2 dx = \\ &= \pi \int_{-r}^{h-r} (r^2 - x^2) dx = \pi \cdot \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{h-r} = \\ &= \pi \cdot \left[r^2(h-r) - \frac{(h-r)^3}{3} - \left(r^2(-r) - \frac{(-r)^3}{3} \right) \right] = \\ &= \pi \cdot \left[hr^2 - r^3 - \frac{h^3 - r^3 - 3h^2r + 3hr^2}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{3hr^2 - h^3 + r^3 + 3h^2r - 3hr^2 - r^3}{3} \right] = \\ &= \pi \cdot \left[\frac{-h^3 + 3h^2r}{3} \right] = \pi \cdot \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right). \end{aligned}$$



Quesito 4

Un test è costituito da 10 domande a risposta multipla, con 4 possibili risposte di cui solo una è esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente almeno a 8 domande. Qual è la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande?

Soluzione 1

Per superare il test occorre rispondere esattamente a 8 quesiti (E8), oppure a 9 quesiti (E9) oppure a 10 quesiti (E10).

Essendo i tre eventi E8, E9 e E10 fra loro incompatibili e supponendo che le risposte date dai candidati siano tra loro indipendenti, il problema può essere risolto applicando il Teorema di Bernoulli delle prove ripetute.

La variabile aleatoria X , corrispondente al numero delle volte k in cui l'evento si verifica su n prove, ha la seguente distribuzione di probabilità binomiale (o di Bernoulli):

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Nel nostro caso:

la probabilità di rispondere correttamente a ciascun quesito è $p = \frac{1}{4}$;

il numero delle prove ripetute è $n = 10$.

Pertanto la probabilità di superare il test rispondendo a caso alle domande è:

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \\ &= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-8} + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-9} + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-10} = \\ &= \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \\ &= \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3^2}{4^{10}} + 10 \cdot \frac{3^1}{4^{10}} + 1 \cdot \frac{3^0}{4^{10}} = \\ &= 45 \cdot \frac{9}{4^{10}} + 10 \cdot \frac{3}{4^{10}} + 1 \cdot \frac{1}{4^{10}} = \\ &= \frac{405 + 30 + 1}{4^{10}} = \\ &= \frac{436}{4^{10}} \cong 0,000416 \cong 0,0416 \% . \end{aligned}$$

Soluzione 2

I casi possibili sono 4^{10} .

Contiamo i casi favorevoli.

Rispondere esattamente a 10 domande	$\Leftrightarrow$	Commettere zero errori	Un solo caso Una unica sequenza (1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, 8C, 9C, 10C)
-------------------------------------	-------------------	------------------------	--

Rispondere esattamente a 9 domande	$\Leftrightarrow$	Commettere un errore	30 casi $\binom{10}{1} = 10$ sequenze di risposte con 1 errore $\times$ 3 possibilità di sbagliare per ogni quesito errato.
------------------------------------	-------------------	----------------------	---

Rispondere esattamente a 8 domande	$\Leftrightarrow$	Commettere due errori	405 casi $\binom{10}{2} = 45$ sequenze di risposte con 2 errori $\times$ 9 possibilità di sbagliare per 2 quesiti errati.
------------------------------------	-------------------	-----------------------	---

$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ Numero di modi di commettere 2 errori nei 10 quesiti.		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
	1	E	E								
	2	E		E							
	3	E			E						
	4	E				E					
	5	E					E				
	6	E						E			
	7	E							E		
	8	E								E	
	9	E									E
	1		E	E							
	2		E		E						
	3		E			E					
	4		E				E				
	5		E					E			
	6		E						E		
	7		E							E	
	8		E								E
	1			E	E						
	2			...		...					
	3			...			...				

$3^2 = 9$ Numero di possibilità di sbagliare per 2 quesiti errati.	Quesito i-esimo	Quesito k-esimo
	1 ^a Risposta errata	1 ^a Risposta errata
		2 ^a Risposta errata
		3 ^a Risposta errata
	2 ^a Risposta errata	1 ^a Risposta errata
		2 ^a Risposta errata
		3 ^a Risposta errata
	3 ^a Risposta errata	1 ^a Risposta errata
		2 ^a Risposta errata
		3 ^a Risposta errata

$$p(E) = p(E8) + p(E9) + p(E10) = \frac{1}{4^{10}} + \frac{30}{4^{10}} + \frac{405}{4^{10}} = \frac{436}{4^{10}} \cong 0,000416 \cong 0,0416\%$$

Quesito 5

Una sfera, il cui centro è il punto $K(-2, -1, 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Soluzione

Il punto di tangenza è il punto di intersezione fra la retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare al piano Π e il piano Π .

I coefficienti direttori del piano Π sono: $a = 2$; $b = -2$; $c = 1$.

Le equazioni parametriche della retta passante per il centro della circonferenza K e perpendicolare al piano Π sono:

$$\begin{cases} x = x_K + at \\ y = y_K + bt \\ z = z_K + ct \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = +2 + 1t \end{cases}$$

Le coordinate del punto di tangenza si ottengono risolvendo il sistema fra l'equazione della retta appena trovata e l'equazione del piano Π .

$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \\ 2x - 2y + z - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 2 \cdot (-2 + 2t) - 2 \cdot (-1 - 2t) + (2 + t) - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \\ - \\ - \\ -4 + 4t + 2 + 4t + 2 + t - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 9t - 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \\ - \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ y = -1 - 2 \cdot 1 = -3 \\ z = 2 + 1 = 3 \\ t = 1 \end{cases}$$

Pertanto il punto di tangenza ha coordinate: $T(0; -3; 3)$

Il raggio della sfera è uguale alla distanza del suo centro dal piano Π :

$$r = d = \frac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 9|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-4 + 2 + 2 - 9|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3.$$

oppure

$$r = \overline{KT} = \sqrt{(x_K - x_T)^2 + (y_K - y_T)^2 + (z_K - z_T)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 + 3)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3.$$

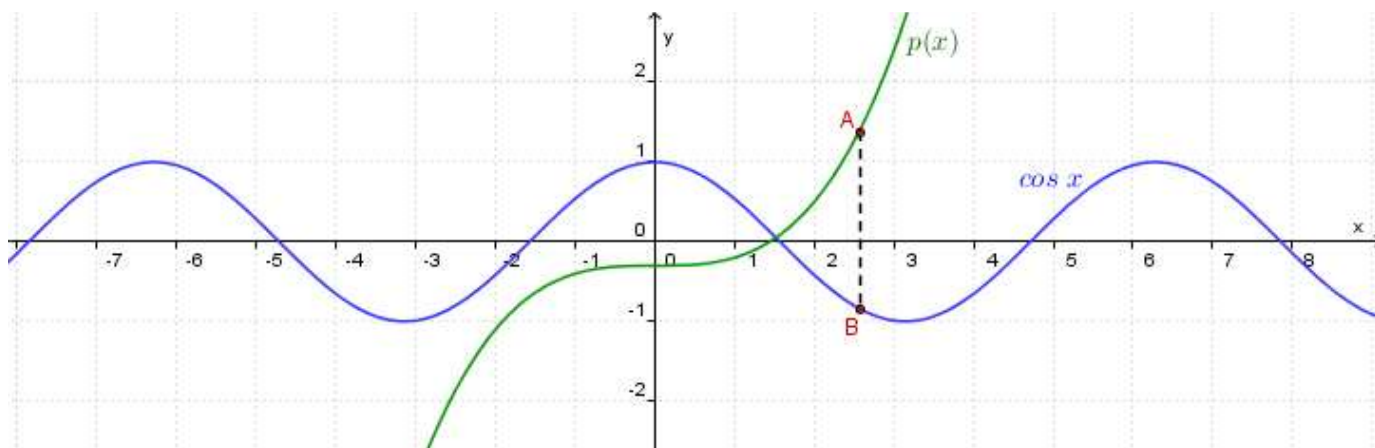
Quesito 6

Si stabilisca se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta:

“Esiste un polinomio $P(x)$ tale che: $|P(x) - \cos(x)| \leq 10^{-3}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ”.

Soluzione 1

$|P(x) - \cos x| = \overline{AB}$ rappresenta la distanza fra i due generici punti $A(x; P(x))$ e $B(x; \cos x)$



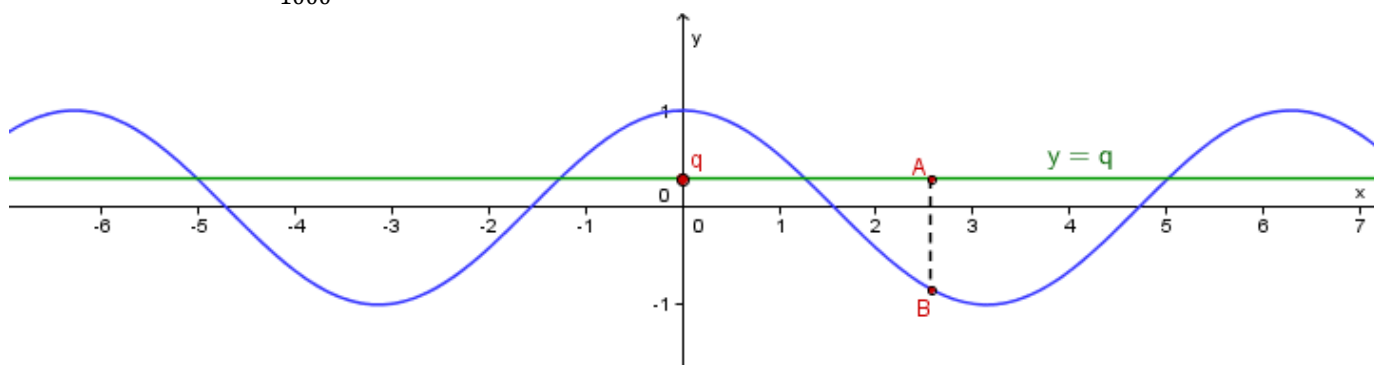
La funzione polinomiale $P(x)$ di grado $n \geq 1$ è illimitata, cioè: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \infty$

mentre la funzione goniometrica è limitata $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Pertanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |P(x) - \cos x| = +\infty$ quindi non è vero che $|P(x) - \cos x| \leq 10^{-3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La diseuguaglianza non è verificata neanche dalla funzione polinomiale di grado zero $P(x) = q$.

Infatti: $|q - \cos x| \leq \frac{1}{1000}$ non è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ perché la funzione $\cos x$ oscilla fra i valori -1 e 1 .



Soluzione 2

Supponiamo per assurdo che: $|P(x) - \cos x| \leq 10^{-3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ sia vera.

Svolgendo l'espressione si ha:

$$-10^{-3} \leq P(x) - \cos x \leq 10^{-3};$$

$$\cos x - \frac{1}{1000} \leq P(x) \leq \cos x + \frac{1}{1000};$$

$$\text{Essendo } -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1 - \frac{1}{1000} \leq \cos x - \frac{1}{1000} \leq P(x) \leq \cos x + \frac{1}{1000} \leq 1 + \frac{1}{1000};$$

$$-1 - \frac{1}{1000} \leq P(x) \leq 1 + \frac{1}{1000}$$

Assurdo, perché la funzione polinomiale $P(x)$ di grado $n \geq 1$ è illimitata.

La disuguaglianza non è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ neanche dalla funzione polinomiale di grado zero $P(x) = q$.

Infatti per i due valori $x = \pi$ e $x = 0$ si ottiene:

$$|q - \cos \pi| \leq \frac{1}{1000} \quad e \quad |q - \cos 0| \leq \frac{1}{1000};$$

$$|q - (-1)| \leq \frac{1}{1000} \quad e \quad |q - 1| \leq \frac{1}{1000} \quad \text{sommando membro a membro}$$

$$|q + 1| + |q - 1| \leq \frac{2}{1000} \quad \text{per la disuguaglianza triangolare}$$

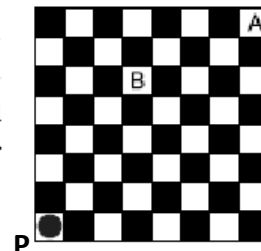
$$|(q + 1) - (q - 1)| \leq |q + 1| + |q - 1| \leq \frac{2}{1000};$$

$$|q + 1 - q + 1| \leq |q + 1| + |q - 1| \leq \frac{2}{1000};$$

$$2 \leq |q + 1| + |q - 1| \leq \frac{2}{1000} \quad \text{che risulta falsa.}$$

Quesito 7

Una pedina è collocata nella casella in basso a sinistra di una scacchiera, come in figura. Ad ogni mossa, la pedina può essere spostata o nella casella alla sua destra o nella casella sopra di essa. Scelto casualmente un percorso di 14 mosse che porti la pedina nella casella d'angolo opposta A, qual è la probabilità che essa passi per la casella indicata con B?



Soluzione

La probabilità che, scelto a caso un percorso di 14 mosse che porta la pedina dalla casella P alla casella A, la pedina passi per la casella B è dato dal rapporto tra il numero di percorsi passanti per B e il numero totale dei percorsi possibili.

Il numero dei percorsi possibili per spostare la pedina dalla casella P alla casella A, senza passare dalla casella B, è:

$$PA = p_{14}^{(7;7)} = \frac{14!}{7! \cdot 7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 3432.$$

Infatti per spostarsi dalla casella P alla casella A, la pedina deve compiere 7 mosse a destra e 7 mosse sopra, per un totale di 14 mosse.

Indicando con D la mossa verso Destra e con S la mossa verso Sopra, alcuni esempi di percorso sono date dalle seguenti sequenze.

Mossa 1	Mossa 2	Mossa 3	Mossa 4	Mossa 5	Mossa 6	Mossa 7	Mossa 8	Mossa 9	Mossa 10	Mossa 11	Mossa 12	Mossa 13	Mossa 14
D	D	D	D	D	D	D	S	S	S	S	S	S	S
D	D	D	D	D	D	S	S	S	S	S	S	S	D
D	D	D	D	D	S	S	S	S	S	S	S	D	D
...	...	...											

Da questi esempi di percorso si intuisce che il numero totale dei percorsi possibili è dato dal numero di anagrammi della parola “DDDDDDSSSSSSS”.

Esso è dato dal numero di permutazioni di 14 elementi, con la ripetizione di 7 volte dell’elemento D e di 7 volte dell’elemento S.

Calcoliamo adesso il numero dei percorsi per spostare la pedina dalla casella P alla casella A, passando dalla casella indicata con B. Tale numero è dato dal prodotto del numero dei percorsi per spostare la pedina dalla casella P alla casella B per il numero dei percorsi per spostare la pedina dalla casella B alla casella A.

Il numero dei percorsi per spostare la pedina dalla casella P alla casella B è:

$$PB = p_8^{(3;5)} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56.$$

Infatti per spostarsi dalla casella P alla casella B, la pedina deve compiere 3 mosse a destra e 5 mosse sopra, per un totale di 8 mosse.

In questo caso il numero totale dei percorsi possibili è dato dal numero di anagrammi della parola “DDSSSSS”.

Il numero dei percorsi per spostare la pedina dalla casella B alla casella A è:

$$BA = p_6^{(4;2)} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15.$$

Infatti per spostarsi dalla casella B alla casella A, la pedina deve compiere 4 mosse a destra e 2 mosse sopra, per un totale di 6 mosse.

In questo caso il numero totale dei percorsi possibili è dato dal numero di anagrammi della parola “DDDDSS”.

In definitiva la probabilità richiesta è:

$$p = \frac{56 \cdot 15}{3432} = \frac{840}{3432} \cong 0,244755 \cong 24,4755 \%.$$