

Indirizzi: LI02, EA02 SCIENTIFICO

LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

PROBLEMA 2

Nella figura 1 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $]0, +\infty)$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

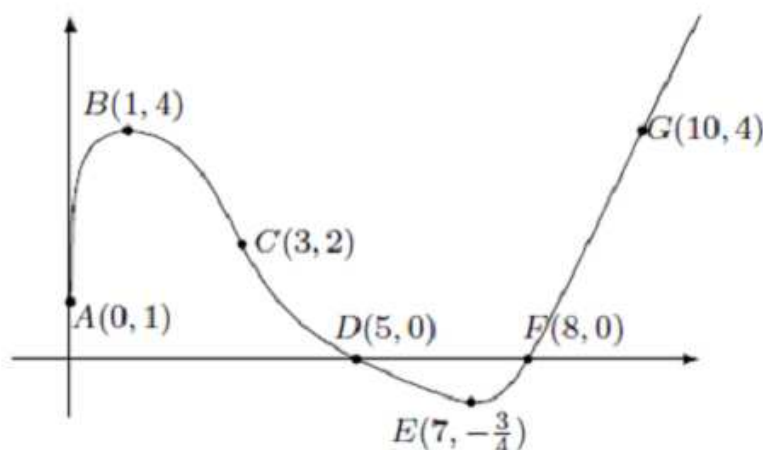


Figura 1

È noto che Γ è tangente all'asse y in A , che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x + y - 8 = 0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x + 2y - 5 = 0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G . Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y = f'(x)$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y = |f'(x)|$$

$$y = |f(x)|'$$

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

- Determina i valori medi di $y = f(x)$ e di $y = |f(x)|$ nell'intervallo $[0,8]$, il valore medio di $y = f'(x)$ nell'intervallo $[1,7]$ e il valore medio di $y = F(x)$ nell'intervallo $[9,10]$.
- Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

Punto 1.1 - Grafico della funzione $f'(x)$

Le informazioni disponibili sono le seguenti:

x	$f(x)$ è derivabile in $]0, +\infty[$	$f'(x)$ è definita in $]0, +\infty[$		
$x = 0$	$f(0) = 1$ $f(x)$ è tangente all'asse y in $A(0; 1)$	Non esiste in $x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$	$x = 0$ Asintoto verticale
$0 < x < 1$	$f(x)$ è crescente	$f'(x) > 0$		
	$f(x)$ ha concavità negativa $f''(x) < 0$	$f'(x)$ è decrescente (perché la sua derivata $f''(x) < 0$)		
$x = 1$	$f(1) = 4$	$f'(1) = 0$		
$1 < x < 3$	$f(x)$ è decrescente	$f'(x) < 0$		
	$f(x)$ ha concavità negativa $f''(x) < 0$	$f'(x)$ è decrescente (perché la sua derivata $f''(x) < 0$)		
$x = 3$	$f(3) = 2$	$f'(3) = -2$ La tangente in $x = 3$ ha equazione $y = -2x + 8$		
$3 < x < 5$	$f(x)$ è decrescente	$f'(x) < 0$		
	$f(x)$ ha concavità positiva $f''(x) > 0$	$f'(x)$ è crescente (perché la sua derivata $f''(x) > 0$)		
$x = 5$	$f(5) = 0$	$f'(5) = -\frac{1}{2}$ La tangente in $x = 5$ ha equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$		
$5 < x < 7$	$f(x)$ è decrescente	$f'(x) < 0$		
	$f(x)$ ha concavità positiva $f''(x) > 0$	$f'(x)$ è crescente (perché la sua derivata $f''(x) > 0$)		
$x = 7$	$f(7) = -\frac{3}{4}$	$f'(7) = 0$		
$7 < x < 8$	$f(x)$ è crescente	$f'(x) > 0$		
	$f(x)$ ha concavità positiva $f''(x) > 0$	$f'(x)$ è crescente (perché la sua derivata $f''(x) > 0$)		
$x = 8$	$f(8) = 0$	$f'(8) = 2$		
$x \geq 8$	$f(x)$ è crescente	$f'(x) > 0$		
	$f(x)$ ha concavità nulla $f''(x) = 0$	$f'(x)$ è costante (perché la sua derivata $f''(x) = 0$)		
$x = 9$	$f(9) = 2$	$f'(9) = 2$		
$x = 10$	$f(10) = 4$	$f'(10) = 2$		

La monotonia della funzione $f'(x)$ si ricava dalle informazioni sulla concavità della funzione $f(x)$.

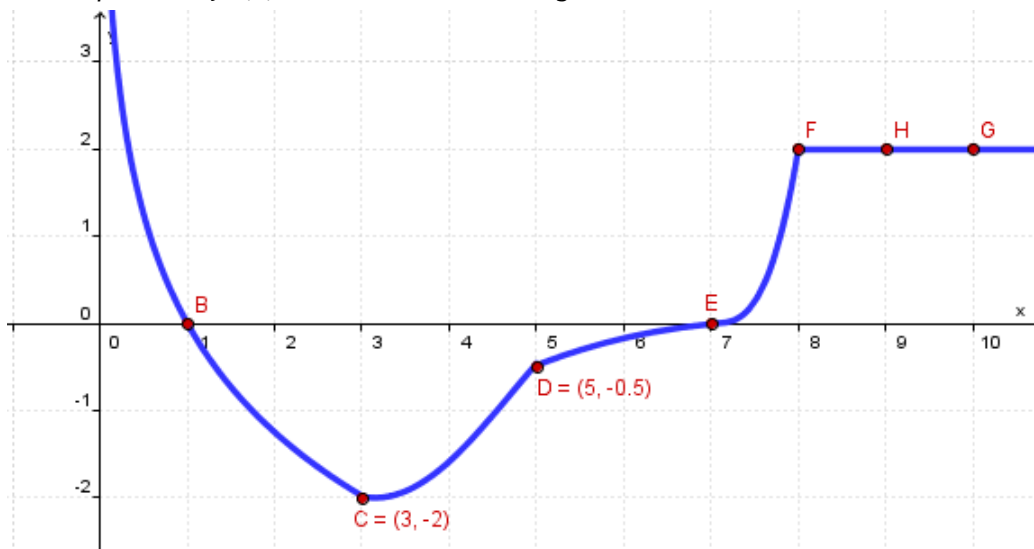
x	$f(x)$	$f''(x)$	$= [f'(x)]'$	$f'(x)$
$0 < x < 3$	Concavità negativa	$f''(x) > 0$	$[f'(x)]' > 0$	$f'(x)$ è decrescente
$x = 3$	Punto di Flesso	$f''(x) = 0$	$[f'(x)]' = 0$	Punto stazionario (min)
$3 < x < 8$	Concavità positiva	$f''(x) < 0$	$[f'(x)]' < 0$	$f'(x)$ è crescente
$x \geq 8$	Concavità nulla	$f''(x) = 0$	$[f'(x)]' = 0$	$f'(x)$ è costante

Nota

La semiretta FG ha equazione $y = 2x - 16$.

Infatti: $m_{FG} = \frac{y_G - y_F}{x_G - x_F} = \frac{4 - 0}{10 - 8} = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x - 8); \quad y = 2x - 16.$

Pertanto il grafico della funzione $f'(x)$ è indicativamente il seguente:



Punto 1.2 - Grafico della funzione $F(x)$

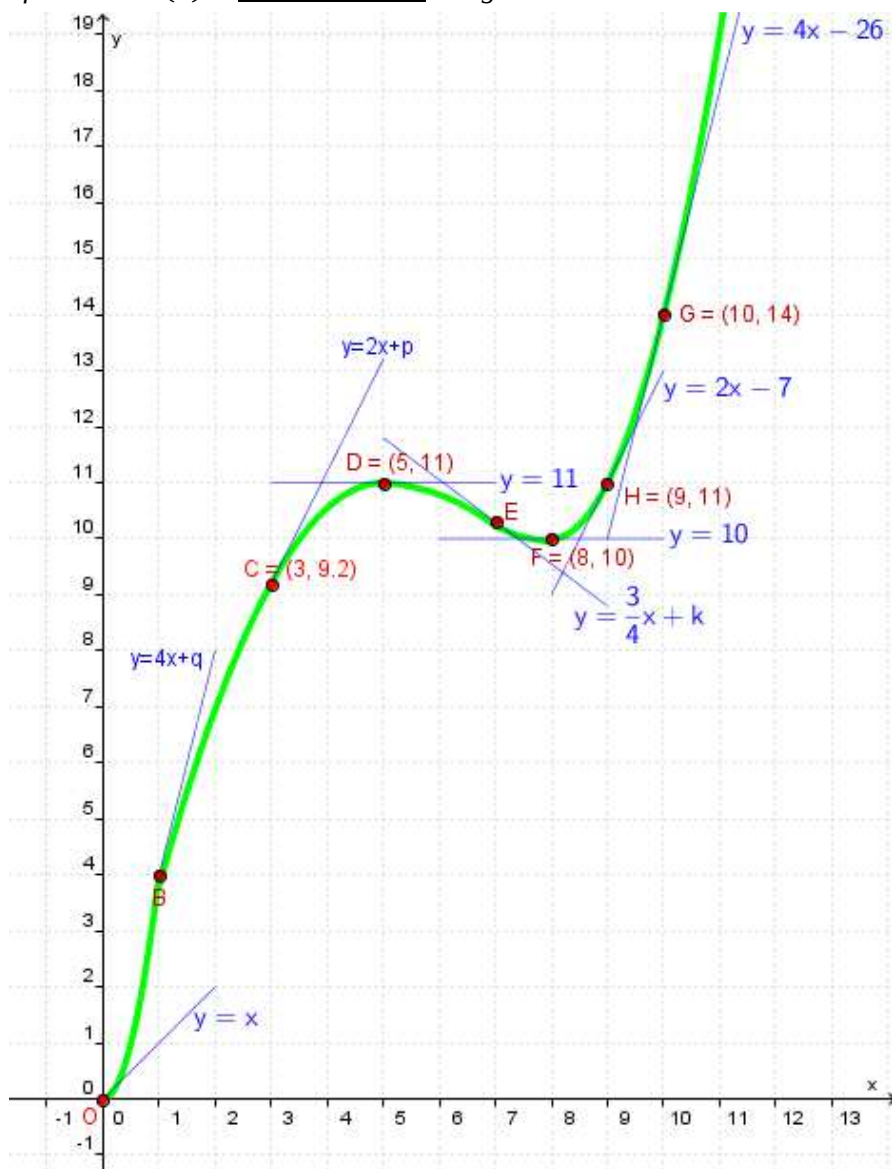
Le informazioni disponibili sono le seguenti:

x	$f(x)$ è derivabile in $]0, +\infty[$	$F(x)$ è continua e derivabile in $[0, +\infty[$
$x = 0$	$F'(0) = f(0) = 1$	$F(0) = 0$
$x = 1$	$F'(1) = f(1) = 4$	$F(x)$ è positiva e crescente
$x = 3$	$F'(3) = f(3) = 2$	$F(x)$ è positiva e crescente
$0 < x < 5$	$F'(x) = f(x) > 0$	$F(x)$ è positiva e crescente
$x = 5$	$F'(5) = f(5) = 0$	$F(5) = 11$ Punto stazionario (max)
$x = 7$	$F'(7) = f(7) = -\frac{3}{4}$	$F(x)$ è positiva e decrescente
$5 < x < 8$	$F'(x) = f(x) < 0$	$F(x)$ è positiva e decrescente
$x = 8$	$F'(8) = f(8) = 0$	$F(8) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10$ Punto stazionario (min)
$x > 8$	$F'(x) = f(x) = 2x - 16$	$F(x)$ è crescente $F(x) = x^2 - 16x + 74$ Infatti $F(x) = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x [2t - 16]dt = 10 + [t^2 - 16t]_8^x = 10 + x^2 - 16x - (8^2 - 16 \cdot 8) = x^2 - 16x + 74$
$x = 9$	$F'(9) = f(9) = 2$	$F(9) = 9^2 - 16 \cdot 9 + 74 = 11$
$x = 10$	$F'(10) = f(10) = 4$	$F(10) = 10^2 - 16 \cdot 10 + 74 = 14$

La concavità della funzione $F(x)$ si ricava dalle informazioni sulla monotonia della funzione $f'(x)$.

x	$F''(x) = f'(x)$	$F(x)$
$0 < x < 1$	$F''(x) > 0$	Concavità positiva
$x = 1$	$F''(x) = 0$	Punto di flesso
$1 < x < 7$	$F''(x) < 0$	Concavità negativa
$x = 7$	$F''(x) = 0$	Punto di flesso
$x > 7$	$F''(x) > 0$	Concavità positiva

Pertanto il grafico della funzione $F(x)$ è indicativamente il seguente:

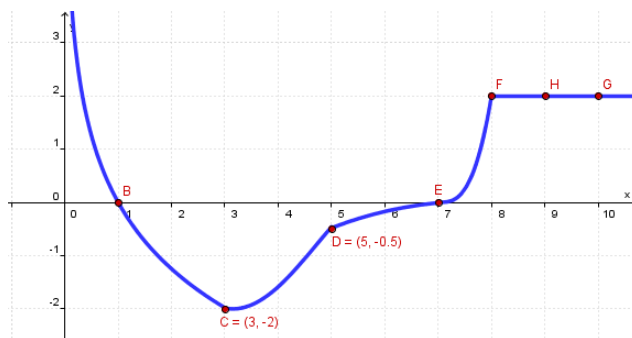


Punto 2.1 - Grafico della funzione $|f'(x)|$

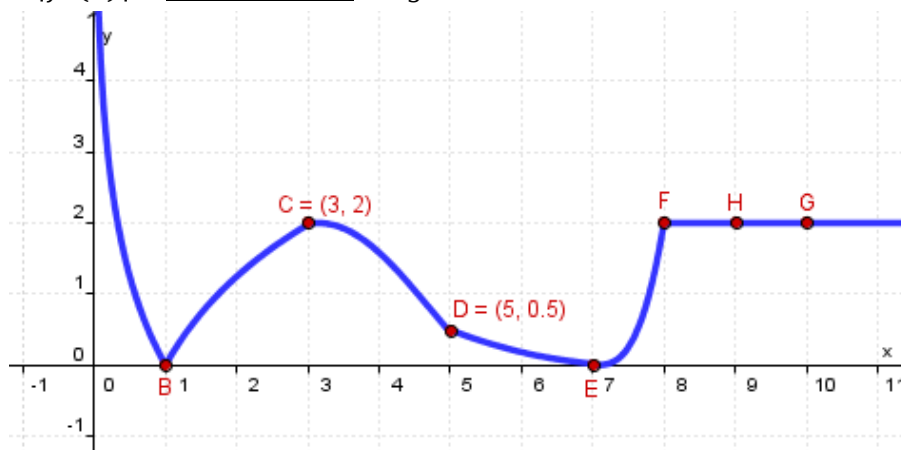
La funzione $|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & \text{se } f'(x) \geq 0 \\ -f'(x) & \text{se } f'(x) < 0 \end{cases}$ è definita in $D =]0, +\infty[$.

La funzione $|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \vee x \geq 7 \\ -f'(x) & \text{se } 1 < x < 7 \end{cases}$

Pertanto il grafico della funzione $|f'(x)|$ si ottiene da quello della funzione $f'(x)$ simmetrizzando la parte negativa della funzione $f(x)$ rispetto all'asse delle ascisse.



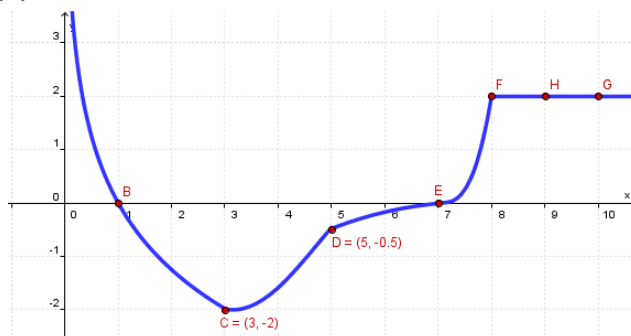
Il grafico della funzione $|f'(x)|$ è indicativamente il seguente:



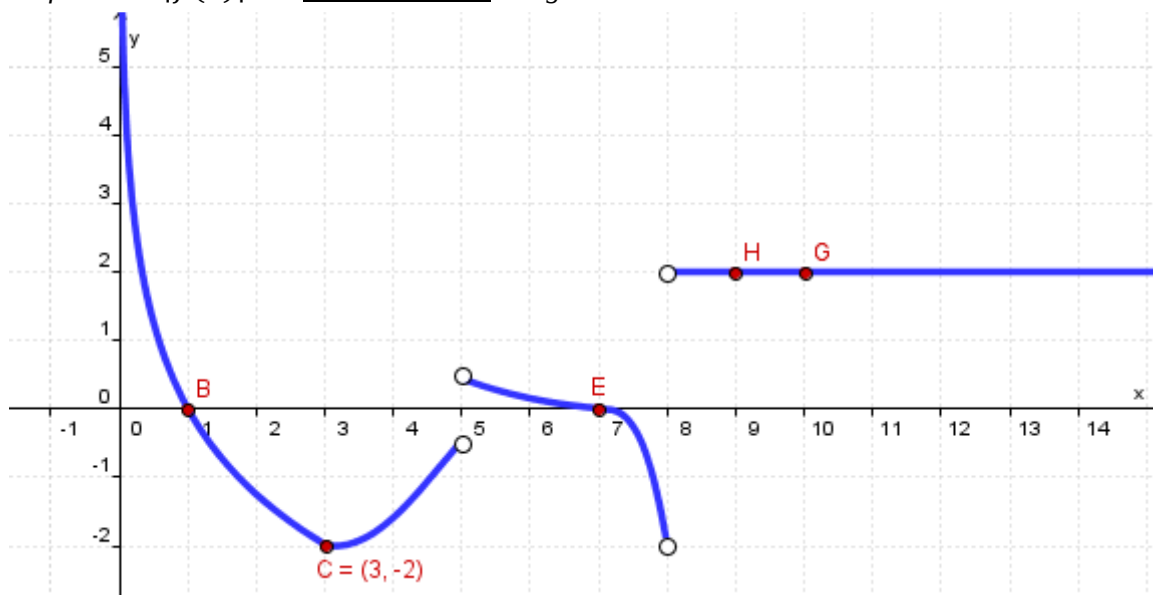
Punto 2.2 - Grafico della funzione $|f(x)|'$

La funzione $|f(x)|' = \begin{cases} f'(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f'(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$ *cioè*

La funzione $|f(x)|' = \begin{cases} f'(x) & \text{se } 0 < x < 5 \quad \vee \quad x > 8 \\ -f'(x) & \text{se } 5 < x < 8 \end{cases}$



Il grafico della funzione $|f(x)|'$ è indicativamente il seguente:



La funzione $|f(x)|'$ non è derivabile in $x = 0$, $x = 5$, $x = 8$.

Ipertanto i dominio della funzione $|f(x)|'$ è $D =]0, 5[\cup]5, 8[\cup]8, +\infty[$.

Punto 2.3 - Grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$

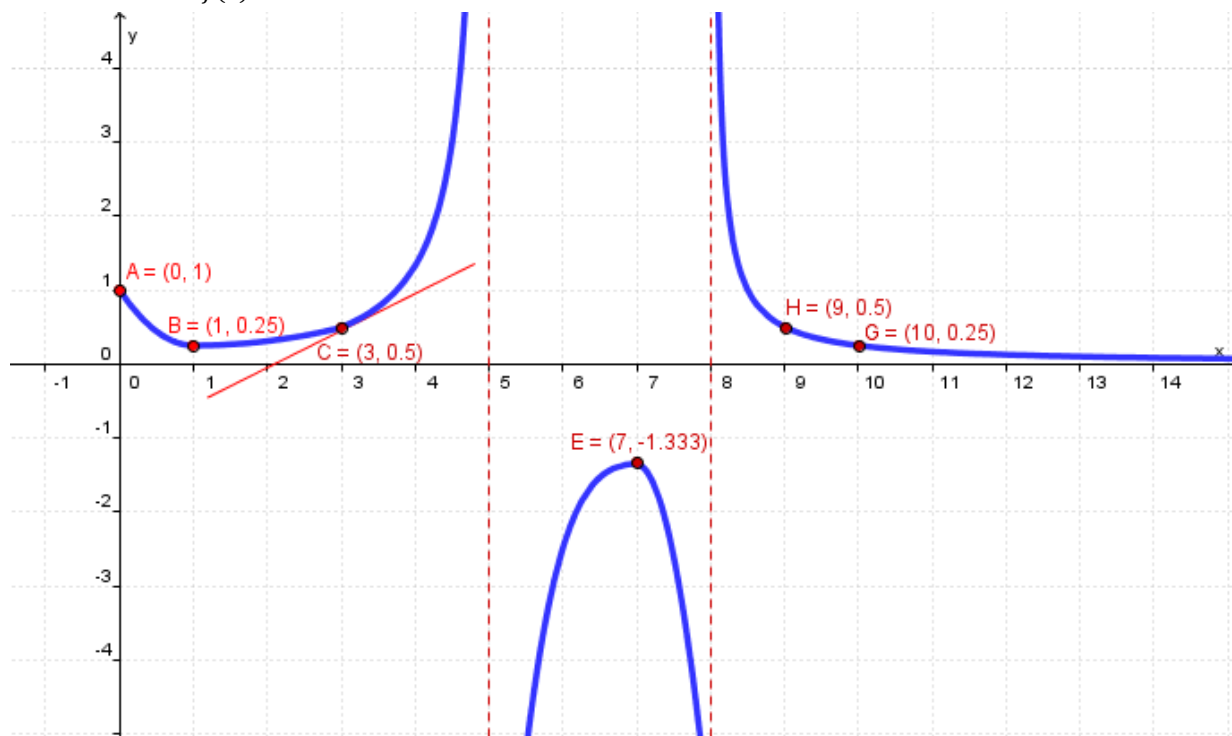
Le informazioni disponibili sono le seguenti:

x	$f(x)$ è derivabile in $]0, +\infty[$	$\frac{1}{f(x)}$ è definita in $[0, 5[\cup]5, 8[\cup]8, +\infty[$
$x = 0$	$f(0) = 1$ $f(x)$ è tangente all'asse y in $A(0; 1)$	$\frac{1}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$
$0 < x < 1$	$f(x)$ è positiva e crescente	$\frac{1}{f(x)}$ è positiva e decrescente
$x = 1$	$f(1) = 4$ (massimo relativo)	$\frac{1}{f(1)} = \frac{1}{4}$ (minimo relativo)
$1 < x < 3$	$f(x)$ è positiva e decrescente	$\frac{1}{f(x)}$ è positiva e crescente
$x = 3$	$f(3) = 2$	$\frac{1}{f(3)} = \frac{1}{2}$
$3 < x < 5$	$f(x)$ è positiva e decrescente	$\frac{1}{f(x)}$ è positiva e crescente
$x = 5$	$f(5) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty$
		$x = 5$ è un asintoto verticale
		$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$
$5 < x < 7$	$f(x)$ è negativa e decrescente	$\frac{1}{f(x)}$ è negativa e crescente
$x = 7$	$f(7) = -\frac{3}{4}$ (minimo relativo)	$\frac{1}{f(7)} = -\frac{4}{3}$ (massimo relativo)
$7 < x < 8$	$f(x)$ è negativa e crescente	$\frac{1}{f(x)}$ è negativa e decrescente
$x = 8$	$f(8) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = -\infty$
		$x = 8$ è un asintoto verticale
		$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = +\infty$
$x \geq 8$	$f(x)$ è positiva e crescente	$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x-16}$ è positiva e decrescente
$x = 9$	$f(9) = 2$	$\frac{1}{f(9)} = \frac{1}{2}$
$x = 10$	$f(10) = 4$	$\frac{1}{f(10)} = \frac{1}{4}$

Maggiori informazioni si ottengono calcolando la derivata prima della funzione $y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

x	$f(x)$	$y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
$x = 0$	$f(0) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -\infty$
$x = 3$	$f(3) = 2 \quad \wedge \quad f'(3) = -2$	$y'(3) = -\frac{-2}{[2]^2} = \frac{1}{2}$

Il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$ è indicativamente il seguente:



Punto 3

Per il teorema della media, il valore medio della funzione continua $f(x)$ nell'intervallo $[0, 8]$ è :

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 f(x) dx = \frac{1}{8} \cdot 10 = \frac{5}{4}.$$

Dove $\int_0^8 f(x) dx = F(8) = 10$ (calcolato precedentemente) $\int_0^8 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx = 11 - 1 = 10.$

Il valore medio della funzione continua $|f(x)|$ nell'intervallo $[0, 8]$ è :

$$|f(z)| = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f(x)| dx = \frac{1}{8-0} \cdot \int_0^8 |f(x)| dx = \frac{1}{8} \cdot 12 = \frac{3}{2}.$$

Dove $\int_0^8 |f(x)| dx = \int_0^5 |f(x)| dx + \int_5^8 |f(x)| dx = 11 + 1 = 12.$

Sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale,

il valore medio della funzione continua $f'(x)$ nell'intervallo $[1, 7]$ è :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) dx = \frac{1}{7-1} \cdot \int_1^7 f'(x) dx = \frac{1}{6} \cdot [f(x)]_1^7 = \frac{1}{6} \cdot (f(7) - f(1)) = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{3}{4} - 4\right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{19}{4}\right) = -\frac{19}{24}. \end{aligned}$$

Il valore medio della funzione continua $F(x)$ nell'intervallo $[9, 10]$ è :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |F(x)| dx = \frac{1}{10-9} \cdot \int_9^{10} (x^2 - 16x + 74) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 16 \cdot \frac{x^2}{2} + 74x \right]_9^{10} = \\ &= \left[\frac{10^3}{3} - 16 \cdot \frac{10^2}{2} + 74 \cdot 10 - \left(\frac{9^3}{3} - 16 \cdot \frac{9^2}{2} + 74 \cdot 9 \right) \right] = \\ &= \left[\frac{1000}{3} - 8 \cdot 100 + 740 - \left(\frac{729}{3} - 8 \cdot 81 + 666 \right) \right] = \\ &= \left[\frac{1000 - 2400 + 2220}{3} - \left(\frac{729 - 1944 + 1998}{3} \right) \right] = \frac{37}{3}. \end{aligned}$$

Punto 4

Utilizzando i dati determinati precedentemente:

x	$f(x)$ è derivabile in $]0, +\infty[$	$F(x)$ è continua e derivabile in $[0, +\infty[$
$x = 0$	$F'(0) = f(0) = 1$	$F(0) = 0$
$x = 8$	$F'(8) = f(8) = 0$	$F(8) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10$ Punto stazionario (min)

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x)$ nel punto di ascissa $x = 0$ è :

$$y - y_p = m \cdot (x - x_p) ;$$

$$y - F(0) = F'(0) \cdot (x - 0) ;$$

$$y - 0 = 1 \cdot x ;$$

$$y = x .$$

L'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x)$ nel punto di ascissa $x = 8$ è :

$$y - y_p = m \cdot (x - x_p) ;$$

$$y - F(8) = F'(8) \cdot (x - 8) ;$$

$$y - 10 = 0 \cdot (x - 8) ;$$

$$y = 10 .$$