ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2015

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Questionario

Quesito 1

Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

Soluzione

Conoscendo che la derivata della funzione da determinare $f'(x) = -2x^2 + 6$ *si ha :*

$$f(x) = \int (-2x^2 + 6)\,dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c$$

Sapendo che la retta t: $y = -2x + 5$ *è tangente al grafico della funzione* $f(x)$ *si ha* $f'(x_0) = m_t$.

$$-2{x_0}^2 + 6 = -2\ ; \qquad 2{x_0}^2 = 8\ ; \qquad {x_0}^2 = 4\ ; \qquad x_0 = \pm 2 = \begin{cases} -2 & Accettabile \\ +2 & Non\ \ accettabile \end{cases}$$

L'ordinata y_0 *del punto di tangenza* T *è :*

$$y_0 = t(x_0) = t(-2) = -2 \cdot (-2) + 5 = 9$$

Pertanto il punto di tangenza ha coordinate: $T(-2\,;9)$.

Imponiamo adesso che tale punto di tangenza appartenga al grafico della funzione $f(x)$ *:*

$$y = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + c\ ; \qquad 9 = -\frac{2}{3}(-2)^3 + 6(-2) + c\ ; \qquad c = 9 - \frac{16}{3} + 12 = \frac{27 - 16 + 36}{3} = \frac{47}{3}$$

Pertanto l'espressione analitica della funzione richiesta è : $y = -\frac{2}{3}x^3 + 6x + \frac{47}{3}$

Quesito 2

Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula:

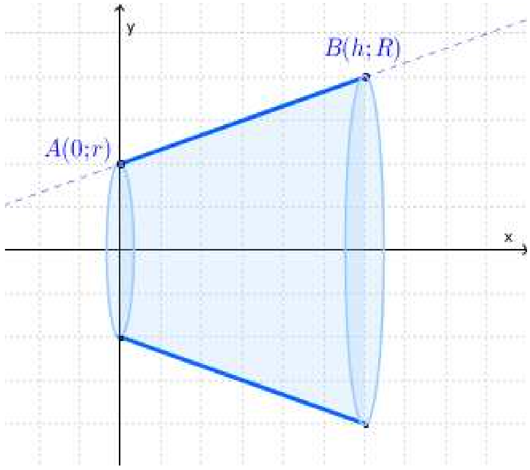
$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

<u>Soluzione</u>

La formula richiesta si può ottenere sfruttando la formula del volume di un solido di rotazione.

In particolare la formula del volume del tronco di cono si ottiene ruotando il segmento di estremi $A(0\,;r)$ e $B(h\,;R)$ attorno all'asse x.



La retta AB ha equazione :

$$\frac{y-r}{R-r} = \frac{x-0}{h-0}\,; \qquad h \cdot (y-r) = x(R-r)\,;$$

$$hy - hr = Rx - rx\,; \qquad hy = hr + Rx - rx\,;$$

$$y = \frac{hr + Rx - rx}{h}\,; \qquad y = r + \frac{R-r}{h}x$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_0^h [f(x)]^2\,dx = \\
&= \pi \cdot \int_0^h \left[r + \frac{R-r}{h}x\right]^2 dx = \\
&= \pi \cdot \int_0^h \left[r^2 + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 x^2 + 2r \cdot \frac{R-r}{h}x\right] dx = \\
&= \pi \cdot \left[r^2 \cdot x + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2r \cdot \frac{R-r}{h} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^h = \\
&= \pi \cdot \left[r^2 \cdot h + \frac{R^2 + r^2 - 2Rr}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} + \frac{Rr - r^2}{h} \cdot h^2\right] = \\
&= \pi \cdot \left[r^2 \cdot h + \frac{R^2 + r^2 - 2Rr}{3}h + (Rr - r^2) \cdot h\right] = \\
&= \pi h \cdot \left[r^2 + \frac{R^2 + r^2 - 2Rr}{3} + (Rr - r^2)\right] = \\
&= \pi h \cdot \left[\frac{3r^2 + R^2 + r^2 - 2Rr + 3Rr - 3r^2}{3}\right] = \\
&= \frac{1}{3}\pi h \cdot (R^2 + r^2 + Rr)\,.
\end{aligned}$$

Quesito 3

Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte?

Metodo 1

Si tratta di un tipico problema di prove ripetute:

"Calcolare la probabilità che un dato evento A si verifichi k volte su n prove effettuate nelle stesse condizioni.

La probabilità richiesta si ottiene applicando la formula di Bernoulli:

$$p(A=k) \;=\; \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k} \qquad\qquad con \quad p = probabilità\ che\ si\ verifica\ l'evento\ \ A$$

Nel nostro caso: $p=\frac{1}{2} \qquad n=6 \qquad k=0\,,1\,,2\,.$

Indichiamo con T *la variabile casuale che individua il numero di teste che escono in sei lanci di una moneta.*

$$p(T\le 2) \;=\; p(T=0)+p(T=1)+p(T=2) \;=$$

$$= \;\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 \;+\; \binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 \;+\; \binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 \;=$$

$$= \;1\cdot 1\cdot\frac{1}{64} \;+\; 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{32} \;+\; 15\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} \;=$$

$$= \;\frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64} \;=$$

$$= \;\frac{22}{64} \;=\; \frac{11}{32}\;.$$

$$p(T\ge 2) \;=\; 1-p(T=0)-p(T=1) \;=$$

$$= \;1-\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 \;=$$

$$= \;1-1\cdot 1\cdot\frac{1}{64} - \;6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{32} \;=$$

$$= \;1-\frac{1}{64}-\;\frac{6}{64} \;=$$

$$= \;\frac{57}{64}\;.$$

Metodo 2

In alternativa si può applicare la definizione di probabilità: $p=\frac{numero\ casi\ favorevoli}{numero\ casi\ possibili}$

$$p(T\le 2) \;=\; p(T=0)+p(T=1)+p(T=2) \;=$$

$$= \;\frac{\binom{6}{0}}{2^6}+\frac{\binom{6}{1}}{2^6}+\frac{\binom{6}{2}}{2^6} \;=\; \frac{1}{64}+\frac{6}{64}+\frac{15}{64} \;=\; \frac{22}{64} \;=\; \frac{11}{32}\;.$$

$$p(T\ge 2) \;=\; 1-\;p(T=0)+p(T=1) \;=$$

$$= \;1-\frac{\binom{6}{0}}{2^6}-\frac{\binom{6}{1}}{2^6} \;=\; 1-\frac{1}{64}-\;\frac{6}{64} \;=\; \frac{57}{64}\;.$$

Quesito 4

Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $y = \frac{\ln(x)}{x}$ è soluzione?

$$y'' + 2 \cdot \frac{y'}{x} = y$$

$$y' + x \cdot y'' = 1$$

$$x \cdot y' = \frac{1}{x} + y$$

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y$$

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la derivata prima e la derivata seconda della funzione:

$$y' \;=\; \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot ln\, x}{x^2} \;=\; \frac{1 - ln\, x}{x^2}$$

$$y'' \;=\; \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - ln\, x)}{x^4} \;=\; \frac{-x - 2x + 2x \cdot ln\, x}{x^4} \;=\; \frac{-3x + 2x \cdot ln\, x}{x^4} \;=\; \frac{-3 + 2\, ln\, x}{x^3}$$

Sostituiamo quindi tali funzioni nelle equazioni differenziali per verificare di quale è y *soluzione.*

Si verifica che $y = \frac{ln\, x}{x}$ *è soluzione della quarta equazione. Infatti:*

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + \frac{2}{x} = y\ ;$$

$$x^2 \cdot \frac{-3 + 2\, ln\, x}{x^3} + x \cdot \frac{1 - ln\, x}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{ln\, x}{x}\ ;$$

$$\frac{-3 + 2\, ln\, x}{x} + \frac{1 - ln\, x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{ln\, x}{x}\ ;$$

$$\frac{-3 + 2\, ln\, x + 1 - ln\, x + 2}{x} = \frac{ln\, x}{x}\ ;$$

$$\frac{ln\, x}{x} = \frac{ln\, x}{x}\ .$$

Quesito 5

Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione $x + y - z = 0$.

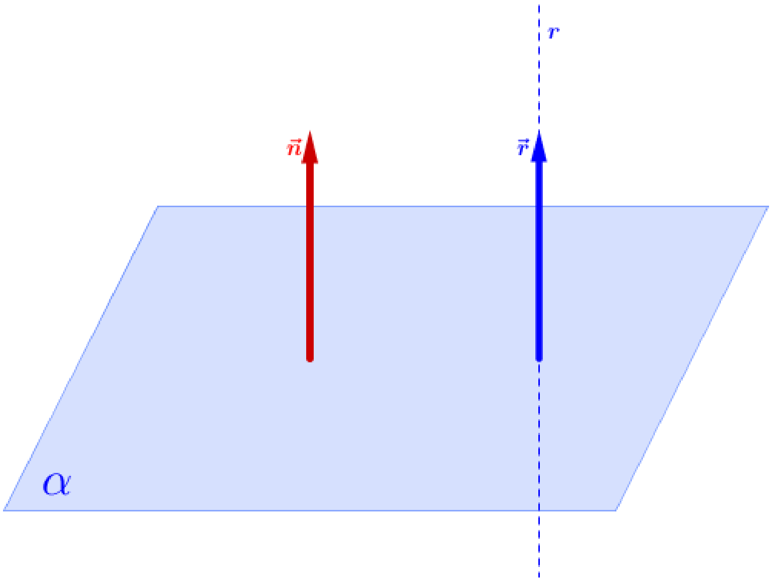
Soluzione

Ricordiamo innanzitutto che:

Il vettore normale al piano di equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ *è il vettore* $\vec{n}\ (a', b', c')$.

Una retta passante per il punto $P_0\left(x_0 ; y_0 ; z_0\right)$ *e avente vettore direzione* $\vec{r}\ (a, b, c)$ *ha equazioni parametriche :*	$\begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \\ z = z_0 + c\,t \end{cases}$

Una retta di vettore direzione $\vec{r}\,(a, b, c)$ *è perpendicolare a un piano di equazione* $a'x + b'y + c'z + d' = 0$	$\Leftrightarrow$	*il vettore direzione della retta* $\vec{r}\,(a, b, c)$ *è parallelo al vettore normale al piano* $\vec{n}\,(a', b', c')$. *Cioè se* $\exists k \in R \quad t.c. \quad a = a' \cdot k \quad b = b' \cdot k \quad c = c' \cdot k$



Nel nostro caso:

Il vettore normale al piano di equazione $x + y - z = 0$ *è il vettore* $\vec{n}\ (1, 1, -1)$.

La retta richiesta ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t \\ y = y_0 + b\,t \\ z = z_0 + c\,t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 + 1 \cdot t \\ z = 0 + (-1) \cdot t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$$

Eliminando il parametro t si ottengono le equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Quesito 6

Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

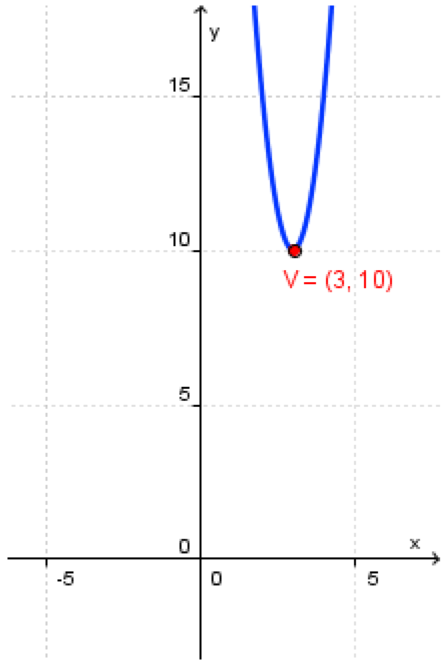
determinare il minimo di f.

<u>Soluzione</u>

L'espressione della funzione $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$ *può essere semplificata in:*

$f(x) = x^2 + 1 - 2x + x^2 + 4 - 4x + x^2 + 9 - 6x + x^2 + 16 - 8x + x^2 + 25 - 10x$;

$f(x) = 5x^2 - 30x + 55$



Trattandosi di una parabola con concavità positiva, il minimo assoluto si trova nell'ascissa del vertice. Cioè:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2 \cdot 5} = 3 \ .$$

Il minimo vale: $f(3) = 5 \cdot 3^2 - 30 \cdot 3 + 55 = 10$.

Quesito 7

Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 sen \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

<u>*Soluzione*</u>

Ricordiamo innanzitutto che:

"L'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso".

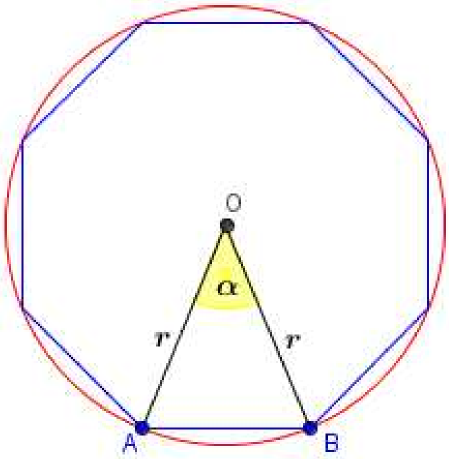
Pertanto: $S_{ABO} \; = \; \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin\alpha \; = \; \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin\alpha$.

Ma in un poligono regolare di n *lati l'angolo* $\alpha = \frac{2\pi}{n}$,

quindi: $S_{ABO} \; = \; \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$.

Essendo il poligono regolare formato da n *triangoli congruenti al triangolo* ABO, *si conclude che:*

$$A(n) \; = \; n \cdot \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \; .$$



Calcoliamo quindi il limite richiesto :

$$\lim_{n\to\infty} A(n) \; = \; \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2} r^2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\right] \; = \; \frac{1}{2} r^2 \cdot \boxed{\lim_{n\to\infty} \; n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}} =$$

Ponendo $\frac{2\pi}{n} = x \quad \Rightarrow \quad n = \frac{2\pi}{x} \qquad$ *e* $\qquad (\,se \;\; n \to \infty\,) \qquad \Rightarrow \qquad (\,x \to 0\,)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \; n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}} = \; \lim_{x\to 0} \frac{2\pi}{x} \cdot \sin x \; = \; \lim_{x\to 0} \; 2\pi \cdot \frac{\sin x}{x} \; = \; 2\pi \cdot 1 \; = 2\pi \; .$$

Si conclude che:

$$\lim_{n\to\infty} A(n) \; = \; \frac{1}{2} r^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \; n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \; = \; \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\pi \; = \; \pi\, r^2 \; .$$

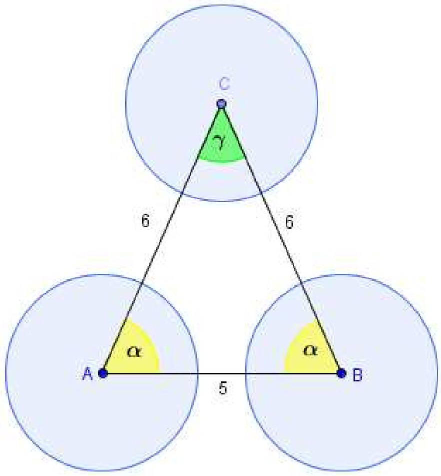
Tale limite rappresenta l'area del cerchio di raggio r *.*

Per $n \to \infty$ *il poligono regolare tende a diventare la circonferenza in cui esso è inscritto.*

Quesito 8

I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

<u>*Soluzione*</u>



Con la formula di Erone calcoliamo l'area del triangolo.

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = \sqrt{\frac{17}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}}\ cm^2 = \frac{5}{4}\sqrt{119}\ cm^2$$

Calcoliamo poi l'area della somma dei tre settori circolari aventi tutti lo stesso raggio 2 ed ampiezza complessiva $180° = \pi$ *radianti (somma degli angoli interni di un triangolo).*

$$S_A + S_B + S_C = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot (\pi r^2) = \frac{\pi}{2\pi} \cdot \pi\, 2^2 = 2\pi\ .$$

Pertanto, la probabilità che il punto P *disti più di* $2\ cm$ *da tutti e tre i vertici del triangolo è:*

$$p\,(d > 2) = \frac{S - S_A + S_B + S_C}{S} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{119} - 2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{2\pi}{\frac{5}{4}\sqrt{119}} = 1 - \frac{8\pi}{5\sqrt{119}}\ .$$

Quesito 9

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0, 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Soluzione

Affinchè sia applicabile il teorema di Lagrange occorre che $f(x)$ sia continua in $[\,0\,,2\,]$ *e derivabile in* $]\,0\,,2\,[$
La funzione $f(x)$ è continua e derivabile $\forall\, x \neq 1$ perché costituita da funzioni continue e derivabili $\forall\, x \in R$.

La funzione è continua in $x = 1$ se : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^3 = 1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 - kx + k) = 1 - k + k = 1$.
Pertanto la funzione è continua $\forall\, k \in R$.

La funzione è derivabile in $x = 1$ se : $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 = 3$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x - k) = 2 - k$.

Pertanto, la funzione è derivabile in $x = 1$ se $3 = 2 - k$; cioè se $k = -1$.
La funzione che soddisfa il teorema di Lagrange è $g(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

Quindi, per tale teorema, esiste almeno un punto $c \in \,]\,0\,,2\,[$ tale che :

$g'(c) = \dfrac{g(2) - g(0)}{2 - 0}$ *cioè* $g'(c) = \dfrac{5 - 0}{2 - 0}$; $\qquad g'(c) = \dfrac{5}{2}$.

Calcoliamo $g'(c) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le x \le 1 \\ 2x + 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$

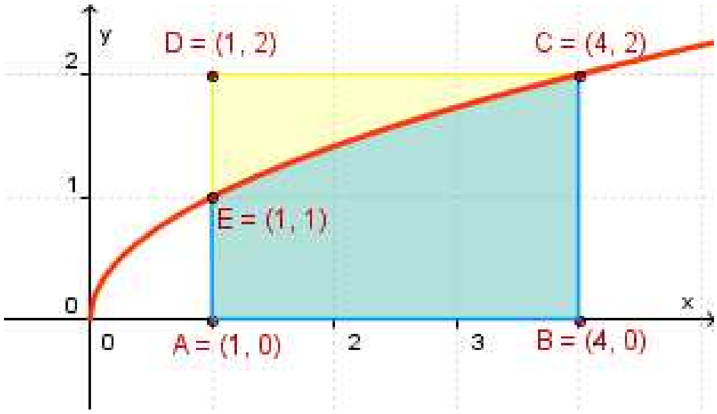
Considerando l'intervallo $[0\,,\,1]$ *si ha* $3x^2 = \frac{5}{2}$; $\quad x^2 = \frac{5}{6}$; $\quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}} = \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{6}} & non\ \ accettabile \\ +\sqrt{\frac{5}{6}} & accettabile \end{cases}$

Considerando l'intervallo $]1\,,\,2]$ *si ha* $2x + 1 = \frac{5}{2}$; $\quad 2x = \frac{3}{2}$; $\quad x = \frac{3}{4}$ *soluzione non accettabile perché non appartenente all'intervallo* $]1\,,\,2]$.

In definitiva, esiste soltanto un punto $c = \sqrt{\frac{5}{6}}$ tale che $g'(c) = \frac{5}{2}$.

Quesito 10

Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \Re, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo ABCD avente vertici A (1, 0), B (4, 0), C (4, 2) e D (1, 2). Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.



Soluzione

L'area del rettangolo ABCD è:

$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 3 \cdot 2 = 6$.

L'area del regione di piano ABCE è:

$$S_{ABCE} = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^4 = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2^6} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \ .$$

Pertanto il rapporto tra le due aree è:

$$\frac{S_{ABCE}}{S_{ABCD} - S_{ABCE}} = \frac{\frac{14}{3}}{6 - \frac{14}{3}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{14}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{2} \ .$$