ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2015

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

Problema 2

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3, 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura 2. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

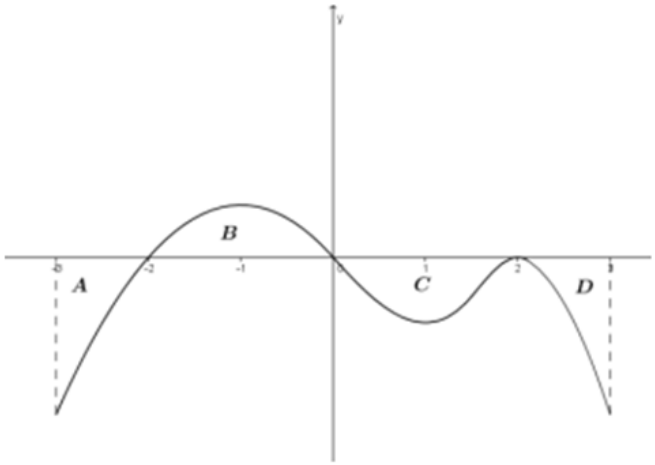

Figura 2

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3, 3]$, per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \frac{1+g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

Punto 1

Analizzando le informazioni della traccia e il grafico in figura 2 si ricava che il grafico cambia concavità almeno due volte. Di conseguenza ci sono almeno due punti di flesso, uno nell'intervallo $]-1\,,1[$ *e un altro nell'intervallo* $]1\,,2[$.

Quindi, per il teorema di Ruffini, la funzione derivata seconda $f''(x)$ *è un polinomio di grado almeno 2.*

Pertanto la funzione $f(x)$ *è un polinomio di grado almeno 4.*

Punto 2

Essendo $g(x)$ *una primitiva di* $f(x)$ $\Rightarrow$ $g(x)$ *è derivabile e* $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in [-3\,,3]$.

I punti stazionari della funzione g(x) corrispondono ai punti in cui si annulla la sua derivata prima.

$\boldsymbol{g'(x)}$		$\boldsymbol{f(x)}$	***in***
$g'(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$f(x) = 0$	$x_1 = -2\,,\ x_2 = 0\,,\ x_3 = +2$
$g'(x) > 0$	$\Leftrightarrow$	$f(x) > 0$	$\forall x \in\ ]-2\,,0[$
$g'(x) < 0$	$\Leftrightarrow$	$f(x) < 0$	$\forall x \in\ ]-3\,,-2[\ \cup\ ]0\,,2[\cup]2\,,+\infty[$

Si conclude che la funzione $g(x)$ *ammette un massimo relativo in* $x = 0$.

$\boldsymbol{g''(x)}$		$\boldsymbol{f'(x)}$	$\boldsymbol{f(x)}$	***in***
$g''(x) = 0$	$\Leftrightarrow$	$f'(x) = 0$	*Tangente orizzontale*	$x_1 = -1\,,\ x_2 = 1\,,\ x_3 = +2$
$g''(x) > 0$	$\Leftrightarrow$	$f'(x) > 0$	*crescente*	$\forall x \in\ ]-3\,,-1[\ \cup\ ]1\,,2[$

Pertanto g(x) volge la concavità verso l'alto negli intervalli $]-3\,,-1[$ *e* $]1\,,2[$.

Punto 3

Applicando il teorema di Torricelli-Barrow alla funzione $f(x)$ *sull'intervallo* $[0\,,3]$ *si ha:*

$$\int_0^3 f(x)\,dx \ = \ g(3) - g(0)$$

Essendo $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = -3 - 1 = -4$ *e* $g(3) = -5$ *si ottiene:*

$$g(0) = g(3) \ - \ \int_0^3 f(x)\,dx \ = \ -5 - (-4) \ = \ -1 \ .$$

Il limite richiesto vale zero. Infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x} \ = \ \frac{1+g(0)}{2x} \ = \ \frac{0}{0}$$ *Applicando De L'Hospital*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+g(x)}{2x} \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{0+g'(x)}{2} \ = \ \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2} \ = \ \frac{f(0)}{2} \ = \ 0$$ *Poiché* $f(0) = 0$

Punto 4

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,dx \;=\; 3\cdot\int_{-2}^{1} f(2x+1)\,dx \;=$$

Effettuando la sostituzione $z = 2x + 1$ *si ha:*

$x = -2 \quad \rightarrow \quad z = -3$

$x = 1 \quad \rightarrow \quad z = 3$

$z = 2x + 1 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\,dz$

Pertanto:

$$\int_{-2}^{1} h(x)\,dx \;=\; 3\cdot\int_{-2}^{1} f(2x+1)\,dx \;=\; 3\cdot\int_{-3}^{3} f(z)\cdot\frac{1}{2}dz \;=\; \frac{3}{2}\cdot\int_{-3}^{3} f(z)\,dz \;=$$

$$=\; \frac{3}{2}\cdot\left[\int_{-3}^{-2} f(z)\,dz \;+\; \int_{-2}^{0} f(z)\,dz \;+\; \int_{0}^{2} f(z)\,dz \;+\; \int_{2}^{3} f(z)\,dz\right] \;=$$

$$=\; \frac{3}{2}\cdot[-Area(A) \;+\; Area(B) \;-\; Area(C) \;-\; Area(D)\,] \;=$$

$$=\; \frac{3}{2}\cdot[-2 \;+\; 3 \;-\; 3 \;-1\,] \;= -\frac{9}{2}\,.$$