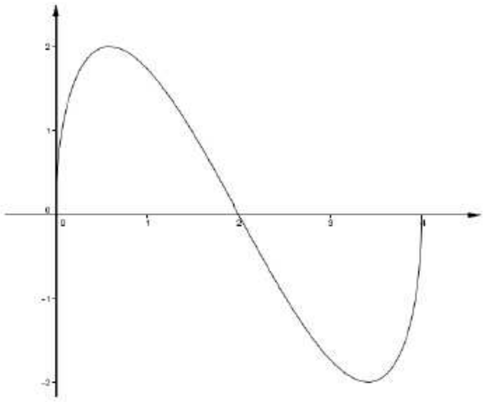
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2014

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 2

Sia $f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$

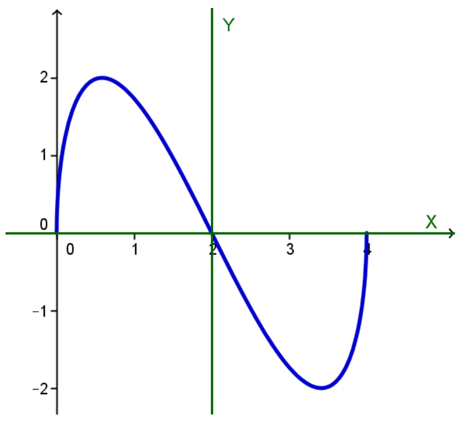


1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2;0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
2. Si dimostri che, qualunque sia t, $0<t<2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2+t$ e $2-t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x+10y+31=0$? E che siano parallele alla retta $23x+12y+35=0$?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x.
4. Sia $h(x)=sen(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x)\,dx$?

Punto 1

Soluzione 1

Per dimostrare che il punto $C(2;0)$ è il centro di simmetria di $f(x)$ è sufficiente verificare che la funzione $f(x)$, considerata nel sistema di riferimento con gli assi paralleli ai dati e con l'origine in $C(2;0)$, è una funzione dispari.



Effettuiamo pertanto, una traslazione di assi di equazioni: $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y \end{cases}$

Otteniamo l'equazione della curva nel nuovo sistema di riferimento CXY:

$Y=[2-(X+2)]\sqrt{4(X+2)-(X+2)^2}$;

$Y=-X\sqrt{4X+8-X^2-4-4X}$;

$Y=-X\sqrt{4-X^2}$

Si verifica facilmente che tale funzione è dispari.

Infatti: $f(-X)=X\sqrt{4-X^2}=-f(X)$

Soluzione 2

$f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$

Per dimostrare che il punto $C(2;0)$ è il centro di simmetria di $f(x)$ occorre dimostrare che tale punto è unito.

Cioè occorre verificare che l'equazione rimane invariata applicando le equazioni della simmetria centrale.

Le equazioni della simmetria centrale rispetto al punto $C(2:0)$ sono:

$\begin{cases} x' = 2x_c - x \\ y' = 2y_c - y \end{cases}$ *che nel nostro caso diventano:* $\begin{cases} x' = 2\cdot 2 - x \\ y' = 2\cdot 0 - y \end{cases}$ *cioè* $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -y \end{cases}$

Occorre però applicare le equazioni inverse: $\begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -y' \end{cases}$

Sostituendo si ottiene:

$-y' = [2-(4-x')]\sqrt{4(4-x')-(4-x')^2}$;

$-y' = -[2-x']\sqrt{16-4x'-16-x'^2+8x'}$;

$y' = (2-x')\sqrt{4x'-x'^2}$ *il che prova l'asserto.*

L'angolo α *che la tangente nel punto C forma con la direzione positiva dell'asse* x *è tale che* $\tan\alpha = f'(2)$.
Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = -\sqrt{4x-x^2}+(2-x)\cdot\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2}+\frac{(2-x)^2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-(4x-x^2)+(2-x)^2}{\sqrt{4x-x^2}} =$$

$$= \frac{-4x+x^2+4+x^2-4x}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}} \qquad con \quad 0<x<4.$$

$$f'(2) = \frac{2\cdot 2^2-8\cdot 2+4}{\sqrt{4\cdot 2-2^2}} = \frac{8-16+4}{\sqrt{8-4}} = \frac{-4}{2} = -2\,.$$

Pertanto: $\tan\alpha = f'(2)$; $\qquad \tan\alpha = -2$;

$\alpha \cong -63{,}435 = +116{,}565° \cong 116°\,(0{,}565\cdot 60)' \cong 116°\,34'$.

Punto 2

Due rette sono parallele se e soltanto se hanno lo stesso coefficiente angolare .
Ricordando che il coefficiente angolare in un punto di ascissa c *è dato da* $f'(c)$, *calcoliamo* $f'(2-t)$ *e* $f'(2+t)$ *:*

$$f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2-8(2-t)+4}{\sqrt{4(2-t)-(2-t)^2}} = \frac{8+2t^2-8t-16+8t+4}{\sqrt{8-4t-4-t^2+4t}} = \frac{2t^2-4}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$f'(2+t) = \frac{2(2+t)^2-8(2+t)+4}{\sqrt{4(2+t)-(2+t)^2}} = \frac{8+2t^2+8t-16-8t+4}{\sqrt{8+4t-4-t^2-4t}} = \frac{2t^2-4}{\sqrt{4-t^2}}$$

Poiché:

$f'(2-t) = f'(2+t) \qquad \forall\, t \in (2-t\,,\ 2+t)$ *si ha che le rette tangenti in tali punti sono parallele.*

Per verificare se esistono rette tangenti alla curva Γ *parallele alla retta* $21x+10y+31=0$
occorre risolvere l'equazione $\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{21}{10}$. *Ma tale equazione non è semplice da risolvere.*
Procediamo quindi tramite l'interpretazione del grafico.

$f'(x)=0$; $\quad \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}=0$; $\quad 2x^2-8x+4=0$; $\quad x^2-4x+2=0$; $\quad x_{1,2}=2\mp\sqrt{2}$

$f'(x)>0$; $\quad \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}>0$; $\quad \begin{cases}2x^2-8x+4>0\\ 0<x<4\end{cases}$; $\quad 0<x<2-\sqrt{2} \quad \vee \quad 2+\sqrt{2}<x<4$

$f'(x)<0$; $\quad \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}<0$; $\quad \begin{cases}2x^2-8x+4<0\\ 0<x<4\end{cases}$; $\quad 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$

Esaminando il grafico, reso noto nella traccia, si osserva che $f(x)$ *ha il massimo assoluto* 2 *per* $x=2-\sqrt{2}$
e il minimo assoluto -2 *per* $x=2+\sqrt{2}$.
Dall'analisi del grafico della curva Γ *si osserva che:*

nell'intervallo $\left[0\,,\ 2-\sqrt{2}\right]$ *la tangente alla curva assume valori da* $+\infty$ *a* 0 .

nell'intervallo $\left[2-\sqrt{2}\,;\ 2\right]$ *la tangente alla curva assume valori da* 0 *a* -2 .

nell'intervallo $\left[2\,;\ 2+\sqrt{2}\right]$ *la tangente alla curva assume valori da* -2 *a* 0 .

nell'intervallo $\left[2+\sqrt{2}\,;\ 4\right]$ *la tangente alla curva assume valori da* 0 *a* $+\infty$.

avendo sfruttato i seguenti due limiti: $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}=+\infty$ *e* $\lim_{x\to 4^+}\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}=+\infty$

Una retta tangente alla curva Γ è parallela alla retta di equazione $21x+10y+31=0$ *se* $f'(x) = -\frac{21}{10} = -2{,}1$.

Poiché $m_1 = -2{,}1 \notin [-2\,,+\infty[$ *non ci sono rette tangenti alla curva Γ parallele alla retta* $21x+10y+31=0$.

Una retta tangente alla curva Γ è parallela alla retta di equazione $23x+12y+35=0$ *se* $f'(x) = -\frac{23}{12} = -1{,}917$.

Poiché $m_2 = -1{,}917 \in [-2\,,+\infty[$ *ci sono due rette tangenti alla curva Γ parallele alla retta* $23x+12y+35=0$.

Punto 3

Data la simmetria della curva rispetto al punto C, l'area della regione di piano racchiusa tra la curva Γ è l'asse x è :

$$S = 2\cdot\int_0^2 f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2}\,dx = 2\cdot\int_0^2 (2-x)(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 2\cdot(2-x)(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^2 (4-2x)(4x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}(4\cdot 2-2^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{2}{3}\sqrt{64} = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

Punto 4.1

I punti del grafico della funzione $h(x) = \sin f(x)$ *con ordinata 1 si ottengono risolvendo l'equazione:*

$\sin\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right] = 1$ *cioè*

$(2-x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Ma essendo il codominio della funzione

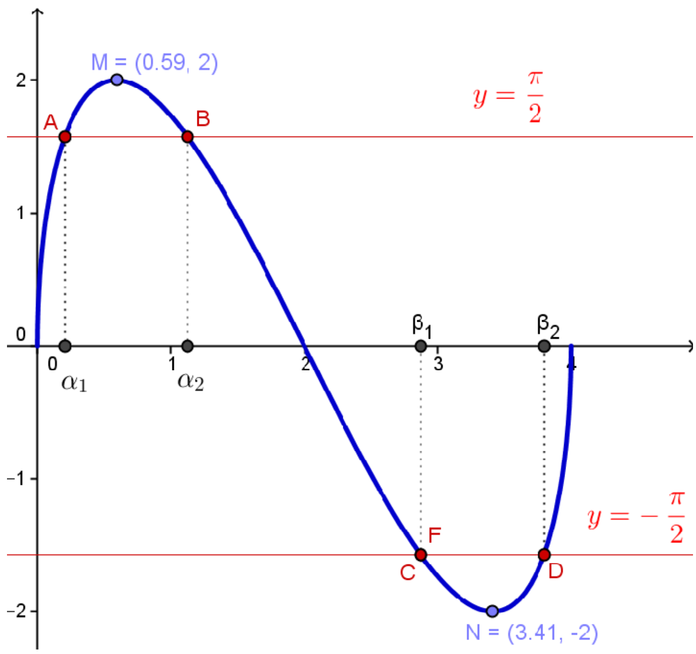
$f(x) = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$ *l'intervallo* $C = [-2\,,\ 2]$

si ha che l'espressione: $(2-x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ha soluzioni se $k=0$ *, cioè quando* $(2-x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2}$

Tale equazione equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} y = (2-x)\sqrt{4x-x^2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} \\ 0 < x < 4 \end{cases}$$



Risolvendo tale sistema per via grafica si deduce che esistono due punti del grafico della funzione $f(x)$ *con ordinata* $\frac{\pi}{2}$.

Pertanto esistono due punti α_1 *e* α_2 *del grafico della funzione* $h(x)$ *con ordinata uguale a* 1 .

Tali punti sono punti di massimo assoluto, con $\alpha_1 \in \left(0\,,\ 2-\sqrt{2}\right)$ *e* $\alpha_2 \in \left(2-\sqrt{2}\,,\ 2\right)$

Simmetricamente, i due punti β_1 *e* β_2 *del grafico della funzione* $h(x)$ *con ordinata uguale a* -1

sono punti di minimo assoluto, con $\beta_1 \in \left(2\,,\ 2+\sqrt{2}\right)$ *e* $\beta_2 \in \left(2+\sqrt{2}\,,\ 4\right)$

Punto 4.2

Per verificare se esistono altri punti di minimo e di massimo relativi conviene studiare la funzione:

$h\,(x) = sin\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\,\right]$

Dominio: $D = [0\,,\ 4]$

Simmetrie: *La funzione è simmetrica rispetto al punto* $C(2;\ 0)$.

Infatti: $h(-x) = sin\ f(-x) = sin\big(-f(x)\big) = -\,sin\,f(x) = -h(x)$.

Intersezione con gli assi: $P_1(0;\ 0)$ $P_2(2;\ 0)$ $P_3(4;\ 0)$

Asintoti: *La funzione non ha asintoti.*

Derivata prima: $h'(x) = f'(x)\cdot cos\big(\,f(x)\big)$

$$h'(x) = \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}\cdot cos\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right]$$

Zeri della derivata prima: $h'(x) = 0\,;$ $\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}\cdot cos\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right] = 0\,;$

$\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}} = 0$ $x_{1,2} = 2 \mp \sqrt{2}$ $x_{1,2} = 2 \mp \sqrt{2}$

$cos\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right] = 0$ $(2-x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{\pi}{2}$ $\wedge$ $(2-x)\sqrt{4x-x^2} = \frac{3\pi}{2}$ $\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \beta_1\,,\ \beta_2$

Segno della derivata prima: $h'(x) > 0\,;$ $\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}\cdot cos\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right] > 0$

$I\ Fattore$ $\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}} > 0$ $0 < x < 2-\sqrt{2}$ $\vee$ $2+\sqrt{2} < x < 4$

$II\ Fattore$ $cos\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\right] > 0$ $-\frac{\pi}{2} < (2-x)\sqrt{4x-x^2} < \frac{\pi}{2}$ *dall'analisi del grafico si ha che:*

$-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$ *per* $0 < x < \alpha_1$ $\vee$ $\alpha_2 < x < \beta_1$ $\vee$ $\beta_2 < x < 4$

Effettuando il prodotto dei segni si ha:

	0		α_1		$2-\sqrt{2}$		α_2		β_1		$2+\sqrt{2}$		β_2		4	
$\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}} \geq 0$		+		+	●	−		−		−	●	+		+		
$cos\,\big(\,f(x)\big) \geq 0$		+	●	−		−	●	+	●	−		−	●	+		**NO**
$h'(x) > 0$		+		−		+		−		+		−		+		
$h\,(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		

Inoltre:

$h\,(\alpha_1) = sin\frac{\pi}{2} = 1$ $h\,(\alpha_2) = sin\frac{\pi}{2} = 1$

$h\,(\beta_1) = sin\frac{3\pi}{2} = -1$ $h\,(\beta_2) = sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$h\,\big(2-\sqrt{2}\big) = sin\big(2-\sqrt{2}\big) = sin\,2 \cong 0{,}9$ $h\,\big(2+\sqrt{2}\big) = sin\big(2+\sqrt{2}\big) = -\,sin\,2 \cong -0{,}9$

In conclusione, la funzione $h\,(x)$ *ha :*

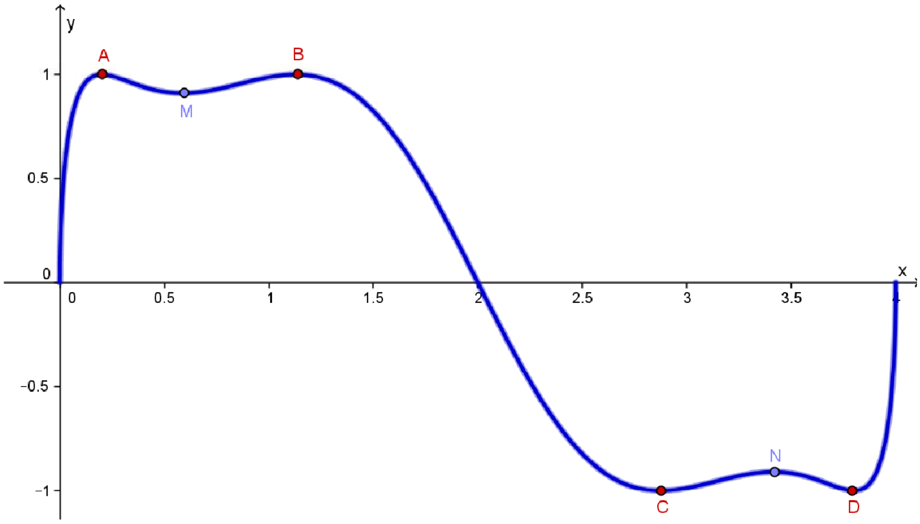
due massimi assoluti (anche relativi) in $A\,(\alpha_1\,;\ 1)$ $\wedge$ $B\,(\alpha_2\,;\ 1)$

due minimi assoluti (anche relativi) in $C\,(\beta_1\,;\ 1)$ $\wedge$ $D\,(\beta_2\,;\ 1)$

due minimi relativi in $O\,(0\,;\ 0)$ $\wedge$ $M\,\big(2-\sqrt{2}\,;\ sin\,2\big)$

due massimi relativi in $N\,\big(2+\sqrt{2}\,;\ -sin\,2\big)$ $\wedge$ $E\,(4\,;\ 0)$.

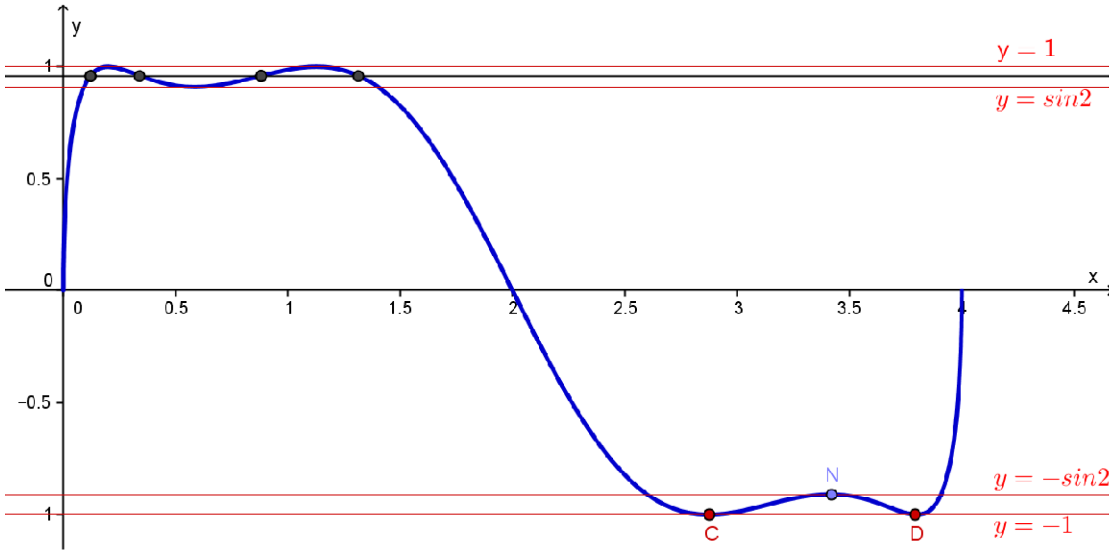
Il grafico della funzione $h\,(x) = sin\,\left[(2-x)\sqrt{4x-x^2}\,\right]$ *è sotto riportato:*



Punto 4.3

Dall'esame del grafico sotto riportato, l'equazione $h(x) = k$ *ha 4 soluzioni distinte quando:*

$sin\,2 < k < 1 \qquad \vee \qquad -1 < k < -\,sin\,2$



Punto 4.4

Per la simmetria della funzione $h(x)$ *rispetto al punto* $(2\,;\,0)$, *risulta:*

$$\int_0^4 h(x)\,dx \;=\; \int_0^2 h(x)\,dx + \int_2^4 h(x)\,dx \;=\; \int_0^2 h(x)\,dx - \int_0^2 h(x)\,dx \;=\; 0\;.$$