ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2013

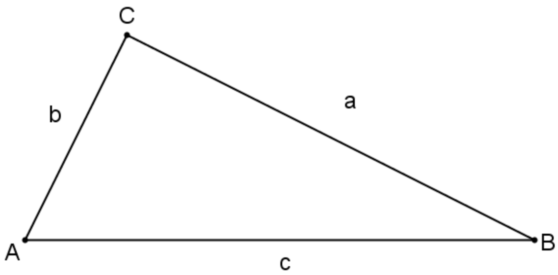
PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Questionario

Quesito 1

Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

Soluzione



L'area di un triangolo è data da: $S = a \cdot b \cdot \sin\gamma$

Sostituendo i dati del quesito si ha: $6 = 2 \cdot 3 \cdot sin\,\hat{C}$.

Da cui si ottiene: $sin\,\hat{C} = 1$; $\hat{C} = 90°$.

Pertanto a e b sono i cateti di un triangolo rettangolo.

Pertanto la misura del terzo lato si può ricavare applicando il teorema di Pitagora.

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Quesito 2

Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

Soluzione

Poniamo $s\,(x) = f(x) - f(4x)$, *la cui derivata è* $s^I\,(x) = f^I(x) - 4 \cdot f^I(4x)$.

Il quesito richiede di determinare $s^I\,(1) = f^I(1) - 4 \cdot f^I(4)$.

Per effettuare tale calcolo occorre conoscere $f^I(1)$ *e* $f^I(4)$.

Poniamo pertanto, $t\,(x) = f(x) - f(2x)$, *la cui derivata è* $t^I\,(x) = f^I(x) - 2 \cdot f^I(2x)$.

Formalizzando i dati si ha: $\begin{cases} t^I\,(1) = 5 \\ t^I\,(2) = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} f^I(1) - 2 \cdot f^I(2 \cdot 1) = 5 \\ f^I(2) - 2 \cdot f^I(2 \cdot 2) = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} f^I(1) - 2 \cdot f^I(2) = 5 \\ f^I(2) - 2 \cdot f^I(4) = 7 \end{cases}$

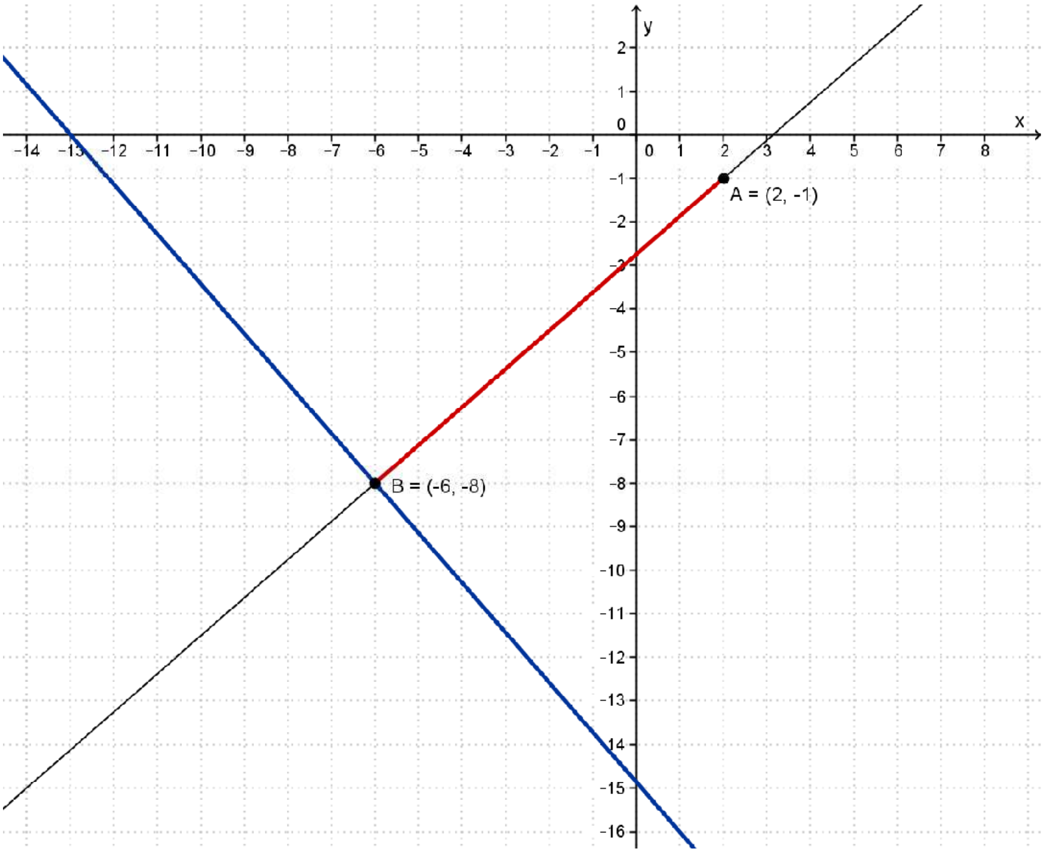
da cui si ottengono: $\begin{cases} f^I(1) = 2 \cdot f^I(2) + 5 \\ f^I(4) = \frac{f^I(2) - 7}{2} \end{cases}$

Possiamo quindi calcolare:

$$s^I\,(1) = f^I(1) - 4 \cdot f^I(4) = 2 \cdot f^I(2) + 5 - 4 \cdot \frac{f^I(2) - 7}{2} = 2 \cdot f^I(2) + 5 - 2 \cdot f^I(2) + 14 = 19 .$$

Quesito 3

Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2;-1)$ e $B(-6;-8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.



Soluzione

Fra le rette del fascio passanti per il punto B, quella avente distanza massima dal punto A è la retta passante per il punto B e perpendicolare alla retta AB.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \qquad m_{\perp AB} = -\frac{8}{7}$$

L'equazione della retta cercata è pertanto:

$y - y_B = m_{\perp AB}(x - x_B)$;

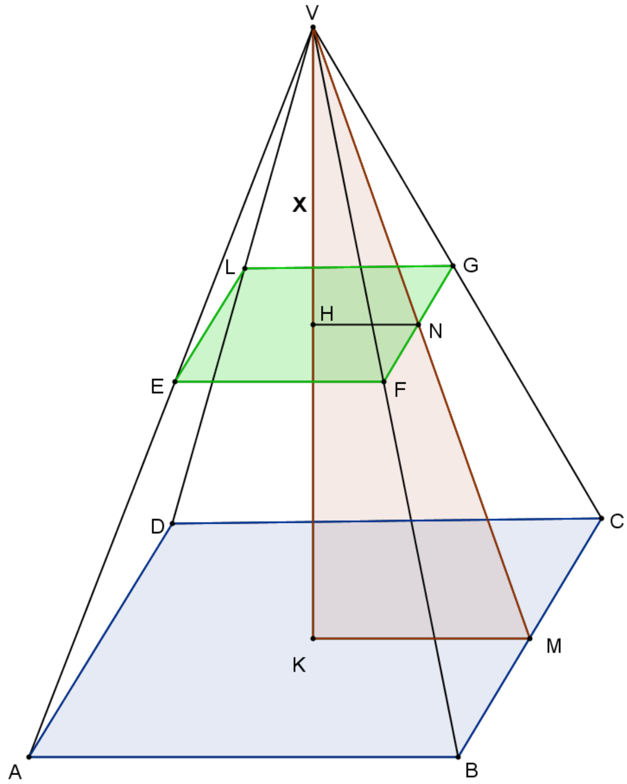
$y + 8 = -\frac{8}{7}(x+6)$;

$7y + 56 = -8(x+6)$;

$8x + 7y + 104 = 0$

Quesito 4

Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.



Soluzione

Il volume del tronco di cono si può ricavare come differenza fra il volume della piramide $VABCD$ e della piramide $VEFGL$.

Poniamo: $\overline{AB} = a$, $\overline{EF} = b$ *e* $\overline{VH} = x$ *con* $0 < x < h$

Consideriamo i triangoli simili VHN *e* VKM *si ha:*

$\overline{VH} : \overline{VK} = \overline{HN} : \overline{KM}$; $x : (x+h) = \frac{b}{2} : \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} \cdot x = \frac{b}{2} \cdot (x+h)$; $ax = b\,(x+h)$;

$ax - bx = b\,h$; $(a-b)x = bh$;

$x = \frac{b\,h}{a-b} \quad \Rightarrow \quad \overline{VH} = \frac{b\,h}{a-b}$.

$$\overline{VK} = \frac{bh}{a-b} + h = \frac{bh + ah - bh}{a-b} = \frac{ah}{a-b}$$

Il volume del tronco di cono è pertanto espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{ah}{a-b} - \frac{1}{3}b^2 \cdot \frac{bh}{a-b} = \frac{1}{3}\frac{a^3 h}{a-b} - \frac{1}{3} \cdot \frac{b^3 h}{a-b} = \frac{1}{3}h\frac{a^3 - b^3}{a-b} =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) \cdot h \ .$$

Quesito 5

In un libro si legge: *"se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)"*. È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

Soluzione

Consideriamo un corpo che si allunga in tutte le direzioni di una certa percentuale p *.*

Per semplificare i calcoli, supponiamo che il corpo sia a forma di parallelepipedo di dimensioni a, b *,* c *.*

Il volume iniziale del parallelepipedo è $V_i = a \cdot b \cdot c$ *.*

Se il corpo si dilata in tutte le direzioni della stessa percentuale p *il volume finale sarà:*

$$V_f = a_f \cdot b_f \cdot c_f = (a + pa) \cdot (b + pb) \cdot (c + pc) = a(1 + p) \cdot b(1 + p) \cdot c(1 + p) = abc(1 + p)^3 = V_i(1 + p)^3$$

Pertanto l'incremento di volume è:

$$\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i(1 + p)^3 - V_i}{V_i} = \frac{V_i(1 + p)^3}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = (1 + p)^3 - 1 = 1 + 3p + 3p^2 + p^3 - 1 = 3p + 3p^2 + p^3 .$$

Da ciò si conclude che:

l'affermazione è vera, con una certa approssimazione, solo nei casi in cui la percentuale p *di dilatazione lineare del corpo abbia un valore molto piccolo , in modo tale che i termini* $3p^2$ *e* p^3 *non modifichino sostanzialmente il valore* $3p$ *.*

Nel nostro esempio, per $p = 0{,}38\%$ *si ha:*

$$3p + 3p^2 + p^3 = 3 \cdot 0{,}0038 + 3 \cdot 0{,}0038^2 + 0{,}0038^3 = 0{,}0114 + 0{,}00004332 + 0{,}000000054872 = 0{,}011443374872 .$$

Valore che può essere approssimato al valore $0{,}0114 = 1{,}14\%$.

Identico ragionamento per la dilatazione superficiale.

Per semplificare i calcoli, supponiamo che il corpo sia di forma rettangolare di dimensioni a *e* b *.*

La superficie iniziale del rettangolo è $S_i = a \cdot b$ *.*

Se il corpo si dilata in tutte le direzioni della stessa percentuale p *la superficie finale sarà:*

$$S_f = a_f \cdot b_f = (a + pa) \cdot (b + pb) = a(1 + p) \cdot b(1 + p) = ab(1 + p)^2 = S_i(1 + p)^2$$

Pertanto l'incremento di superficie è:

$$\frac{S_f - S_i}{S_i} = \frac{S_i(1 + p)^3 - S_i}{S_i} = \frac{S_i(1 + p)^3}{S_i} - \frac{S_i}{S_i} = (1 + p)^2 - 1 = 1 + 2p + p^2 - 1 = 2p + p^2 .$$

Da ciò si conclude che:

l'affermazione è vera, con una certa approssimazione, solo nei casi in cui la percentuale p *di dilatazione lineare del corpo abbia un valore molto piccolo , in modo tale che il termine* p^2 *non modifichi sostanzialmente il valore* $2p$ *.*

Nel nostro esempio, per $p = 0{,}38\%$ *si ha:*

$$2p + p^2 = 2 \cdot 0{,}0038 + 0{,}0038^2 = 0{,}0076 + 0{,}00001444 = 0{,}00761444 .$$

Valore che può essere approssimato al valore $0{,}0076 = 0{,}76\%$ *.*

Quesito 6

Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

Soluzione

Per determinare il numero che occupa la 1441-esima posizione conviene ordinare i numeri in ordine crescente:

Posizione Numero	**Numero**	**Numero allineamenti**
1°	1234567	*Permutando le ultime 2 cifre abbiamo due allineamenti*
2°	1234576	
3°	1234657	*permutando le ultime 3 cifre abbiamo* $3 \cdot 2 = 6$ *allineamenti*
4°	1234675	
5°	1234756	
6°	1234765	
7°	1235467	
8°	1235476	
9°	1235647	
10°	1235674	
11°	1235746	
12°	1235764	
13°	1236457	
14°	1236475	
15°	1236547	
16°	1236574	
17°	1236745	
18°	1236754	
19°	1237456	*permutando le ultime 4 cifre abbiamo* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ *allineamenti*
20°	1237465	
21°	1237546	
22°	1237564	
23°	1237645	
24°	1237654	
25°	1243567	*permutando le ultime 5 cifre abbiamo* $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ *allineamenti*
…	…	
120°	1276543	
121°	1324567	*permutando le ultime 6 cifre abbiamo* $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ *allineamenti*
…	…	
720°	1765432	

Procedendo in questo modo si ha:

721°	2314567	*permutando le ultime 6 cifre abbiamo* $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ *allineamenti*
…	…	
1440°	2765431	
1441°	3124567	

Per determinare il numero che occupa la 5036-esima posizione conviene ordinare i numeri in ordine decrescente, e considerare il quintultimo numero.

Posizione Numero	**Numero**
5040°	7654321
5039°	7654312
5038°	7654231
5037°	7654213
5036°	7654132

Quesito 7

In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Quale è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

<u>Soluzione</u>

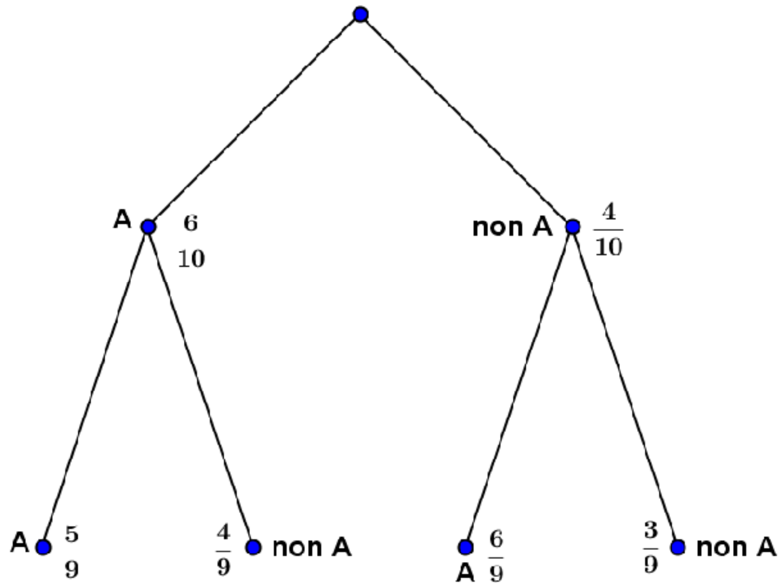
Si tratta di un problema del tipo "estrazione senza reimbussolamento" .

Nella selezione della prima persona i casi possibili sono chiaramente 10, mentre quelli favorevoli (occhi non azzurri) sono 4.

Dopo la selezione della prima persona i casi possibili sono 9 e quelli favorevoli sono chiaramente 3.

Pertanto, per il teorema della probabilità composta, si ha che la probabilità dell'evento richiesto è:

$$p(\bar{A}) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} = \frac{2}{15} \cong 13{,}3\,\% \ .$$



Quesito 8

8. Si mostri, senza utilizzare il teorema di *l'Hôpital*, che:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{senx}-e^{sen\pi}}{x-\pi}=-1$$

Soluzione 1

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin\pi}}{x-\pi}=$$

Effettuiamo la sostituzione: $x-\pi=t \quad \Rightarrow$

$$\lim_{t\to0}\frac{e^{\sin(\pi+t)}-e^{\sin\pi}}{t} \qquad essendo \quad \sin(\pi+t)=-\sin t \quad e \quad e^{\sin\pi}=1 \quad si\ ha:$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{-\sin t}-1}{t}= \qquad utilizzando\ i\ limiti\ notevoli: \quad \lim_{z\to0}\frac{e^{z}-1}{z}=1 \quad e \quad \lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1 \quad si\ ha:$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{-\sin t}-1}{-\sin t}\cdot\left(-\frac{\sin t}{t}\right)=1\cdot(-1)=1\,.$$

Soluzione 2

$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin\pi}}{x-\pi}$ *è il limite del rapporto incrementale della funzione* $f(x)=e^{\sin x}$ *calcolato in* $x=\pi$

Pertanto tale limite coincide con la derivata $f^{I}(\pi)$ *calcolata nel punto* $x=\pi$.

Essendo $f^{I}(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}$ *si ha :*

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x}-e^{\sin\pi}}{x-\pi}=f^{I}(\pi)=\cos\pi\cdot e^{\sin\pi}=-1\cdot e^{0}=-1\cdot1=-1\,.$$

Quesito 9

Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

<u>*Soluzione*</u>

Si tratta di confrontare insiemi di cardinalità infinita.
Per effettuare tale tipo di confronto occorre ricordare che:

Se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi A e B	$\Rightarrow$	*I due insiemi A e B hanno la stessa cardinalità*
Se esiste una corrispondenza iniettiva tra l'insieme A e l'insieme B, ma non esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B	$\Rightarrow$	*L'insieme B ha cardinalità maggiore dell'insieme B*

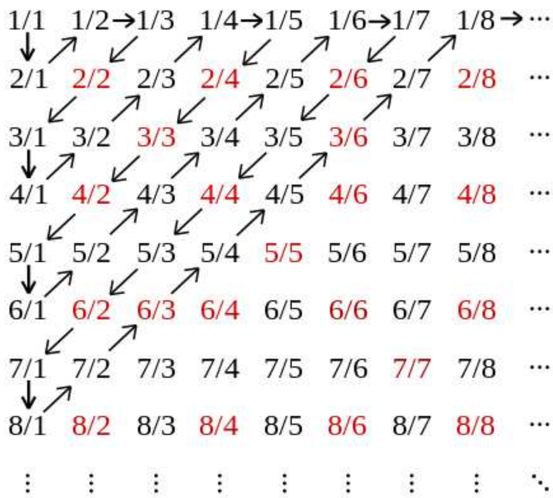
Anche se $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Q}$, l'insieme dei numeri naturali $\boldsymbol{N}$ ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri razionali $\boldsymbol{Q}$ (esiste cioè una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{Q}$).

Questo risultato, apparentemente paradossale, è stato dimostrato da Georg Cantor.

Il suo ragionamento si basa sul diagramma a fianco: è possibile infatti ordinare i razionali positivi, seguendo le frecce, in modo che ad ognuno di essi sia assegnato un numero naturale. Pertanto $\boldsymbol{Q}^+$ è numerabile.

Ragionando alla stessa maniera si dimostra che l'insieme dei numeri razionali negativi $\boldsymbol{Q}^-$ sono numerabili.

Poiché l'unione di due insiemi numerabili è ancora numerabile, si conclude che l'insieme dei numeri razionali $\boldsymbol{Q}$ è numerabile.



$\boldsymbol{Q}^+$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{1}$	...
$\boldsymbol{N}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	...

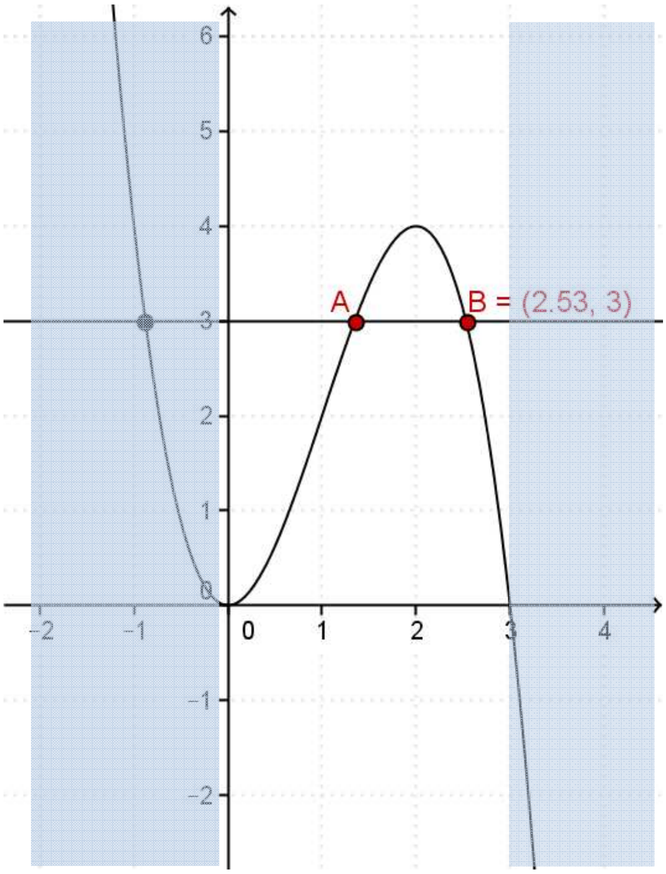
Al contrario, i numeri reali non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, perché essi hanno una cardinalità maggiore del numerabile (potenza del continuo).

Poiché infine, i numeri irrazionali si ottengono dall'insieme dei numeri reali togliendo i numeri razionali $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{Q}$, si conclude che i numeri irrazionali hanno la potenza del continuo, e quindi hanno una cardinalità maggiore dei numeri razionali.

In definitiva ha ragione Luisa: "Sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali"

Quesito 10

Si stabilisca per quali valori $k \in R$ l'equazione $x^2(3-x)=k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0,3]$. Posto $k=3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.



Soluzione

Ponendo $y = k$ *si ottiene il seguente sistema:*

$$\begin{cases} y = x^2(3-x) \\ y = k \end{cases}$$

Tale sistema viene risolto tracciando i grafici delle due funzioni.

$y = k$ *è una retta parallela all'asse* x *.*

Studiamo il grafico della cubica $y = x^2(3-x)$ *.*

$I.D. = (-\infty, +\infty)$

$$\begin{cases} y = x^2(3-x) \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad O(0;0)$$

$$\begin{cases} y = x^2(3-x) \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(3-x) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} O(0;0) \\ P\,(3;0) \end{matrix}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2 - x^3) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{3}{x} - 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(3x^2 - x^3) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{3}{x} - 1\right) = +\infty$$

$f'(x) = -3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0:\quad -3x^2 - 6x = 0;\qquad \begin{matrix} x = 0 \\ x = 2 \end{matrix}$

$f'(x) > 0:\quad -3x^2 - 6x > 0;\qquad 0 < x < 2$

$f'(x) < 0:\quad -3x^2 - 6x < 0;\qquad x < 0 \quad \vee \quad x > 2$

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad O(0;0)$ *punto di minimo relativo*

$f(2) = 4 \quad \Rightarrow \quad Q(2;4)$ *punto di massimo relativo*

$f''(x) = -6x - 6$

$f''(x) = 0:\quad -6x - 6 = 0;\qquad x = 1$

$f''(x) > 0:\quad -6x - 6 > 0;\qquad x < 1 \qquad \Rightarrow \qquad F(1;2)$ *punto di Flesso*

$f''(x) < 0:\quad -6x - 6 < 0;\qquad x > 1$

Dall'analisi dei due grafici si deduce che l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte per $0 \le k < 4$

Posto $k = 3$ *l'equazione diventa:* $x^2(3-x) = 3$ *cioè* $-x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ *che ha 2 soluzioni, di cui la maggiore ha un valore compreso fra 2 e 3.*

Per determinare il suo valore, approssimato ai centesimi, consideriamo la funzione polinomiale:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$ *continua e derivabile in tutto l'insieme R.*

Per il Teorema di Bolzano (o dell'esistenza degli zeri), essa assume uno zero nell'intervallo $]2{,}3[$*, perché assume valori di segno opposto agli estremi:* $f(2) = 1 > 0$ *e* $f(3) = -3 < 0$ *.*

Tale soluzione è unica poiché la funzione è monotona decrescente in tale intervallo.

Applichiamo il metodo di bisezione per determinare la soluzione.

METODO DI BISEZIONE							
			$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$				
a_n	**bn**	**m_n**	**$h(a_n)$**	**$h(b_n)$**	**$h(m_n)$**	**ε_n**	**ε_n<0,01**
2	3	2,5	1,000	-3,000	0,125	1,000	CONTINUA
2,5	3	2,75	0,125	-3,000	-1,109	0,500	CONTINUA
2,5	2,750	2,625	0,125	-1,109	-0,416	0,250	CONTINUA
2,5	2,625	2,563	0,125	-0,416	-0,127	0,125	CONTINUA
2,5	2,563	2,531	0,125	-0,127	0,003	0,063	CONTINUA
2,53125	2,56250	2,54688	0,00339	-0,12720	-0,06077	0,031	CONTINUA
2,53125	2,54688	2,53906	0,00339	-0,06077	-0,02841	0,016	CONTINUA
2,53125	2,53906	2,53516	0,00339	-0,02841	-0,01244	0,008	STOP

x = 2,53