ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

Sessione Ordinaria 2013

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Problema 2

Sia f la funzione definita per tutti gli x positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e si tracci il suo grafico γ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici *Oxy*; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0,1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito, e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta $y = -1$.

Punto 1

Studiare la funzione $f(x) = x^3 \ln x$

1. $I.D. =]0, +\infty[$

2. La curva non presenta simmetrie.

3. Zeri della funzione $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \ln x = 0\,;$

$$\begin{matrix} x^3 = 0 & x = 0\ (s.\,tripla\ non\ accettabile) \\ \ln x = 0 & x = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad P\,(1;0)$$

4. Intervalli nei quali è $f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \ln x > 0\,;$

$$\begin{matrix} x^3 = 0 & x > 0 \\ \ln x = 0 & x > 1 \end{matrix} \qquad x > 1$$

5. Intervalli nei quali è $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < 1$

6. Limiti agli estremi dell'insieme di definizione

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \ln x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\ l'asintoto\ orizzontale\ a\ destra$$

Indaghiamo sull'esistenza dell'asintoto obliquo $y = mx + q$ *:*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\ l'asintoto\ obliquo\ a\ destra$$

$$\lim_{x\to0^+} x^3 \ln x = 0^+ \cdot (-\infty) = ?$$

$$\lim_{x\to0^+} x^3 \ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \overset{H}{\Leftrightarrow} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to0^+} -\frac{x^3}{3} = 0^- \quad \Leftrightarrow \quad \nexists\ l'asintoto\ verticale\ in\ x = 0$$

7. Derivata prima

$$f^I(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 + 3x^2 \ln x = x^2\,(1 + 3 \ln x)$$

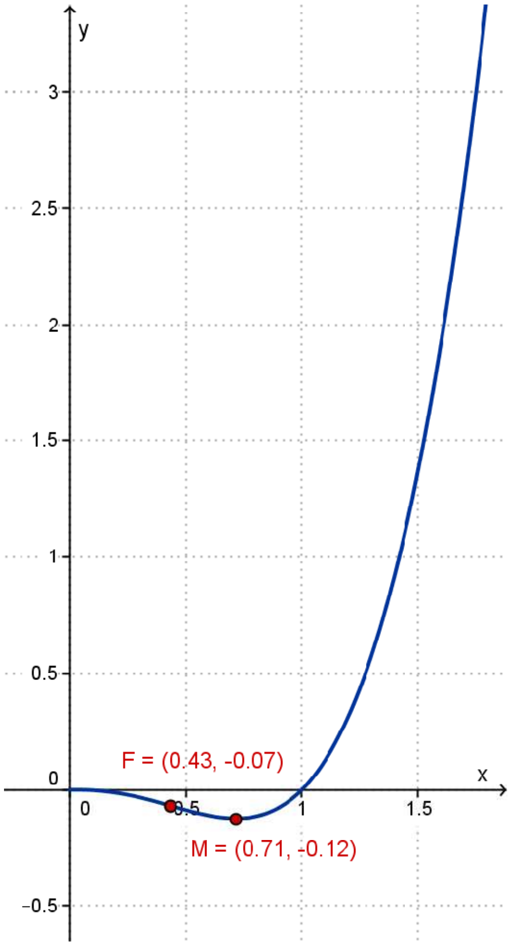
8. Punti nei quali è $f^{I}(x) = 0$

$$x^2(1+3\ln x)=0 \qquad \begin{cases} x^2 = 0 & x=0 & x = 0 \\ 1+3\ln x = 0 & \ln x = -\dfrac{1}{3} & x = e^{-\frac{1}{3}} \cong 0{,}717 \end{cases}$$

9. Intervalli nei quali è $f^{I}(x) > 0$

$$x^2(1+3\ln x)>0 \qquad \begin{cases} x^2 > 0 & \forall x \neq 0 & \forall x \neq 0 \\ 1+3\ln x > 0 & \ln x > -\dfrac{1}{3} & x > e^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \qquad \left]e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right[$$

10. Intervalli nei quali è $f^{I}(x) < 0$ $\qquad \left]0\,,\ e^{-\frac{1}{3}}\right[$



11. Punti di max e di min relativi

Pertanto in $x = e^{-\frac{1}{3}}$ *c'è un punto di minimo relativo.*

$$f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3e} \cong -0{,}123$$

12. Derivata seconda

$$f^{II}(x) = 2x + 6x\ln x + 3x^2\cdot\frac{1}{x} = 5x + 6x\ln x = x\,(5+6\ln x)$$

13. Punti nei quali è $f^{II}(x) = 0$

$$x\,(5+6\ln x) = 0 \qquad \begin{cases} x = 0 & & \\ 5+6\ln x = 0 & \ln x = -\dfrac{5}{6} & x = e^{-\frac{5}{6}} \cong 0{,}435 \end{cases}$$

14. Intervalli nei quali è $f^{II}(x) > 0$

$$x\,(5+6\ln x) > 0 \qquad \begin{cases} x > 0 & \\ x > e^{-\frac{5}{6}} & \end{cases} \qquad x > e^{-\frac{5}{6}} \qquad \left]e^{-\frac{5}{6}}, +\infty\right[$$

15. Intervalli nei quali è $f^{II}(x) < 0$ $\qquad \left]0\,,\ e^{-\frac{5}{6}}\right[$

Pertanto in $x = e^{-\frac{5}{6}}$ *c'è un punto di flesso.*

$$f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = \left(e^{-\frac{5}{6}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = e^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) \cong -0{,}068\ .$$

Punto 2

La parabola richiesta ha equazione: $y = ax^2 + bx$

Imponendo il passaggio per il punto P $(1;0)$ *si ha:* $0 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1\,;$ $\qquad b = -a$

Pertanto l'equazione diventa: $y = ax^2 - ax$

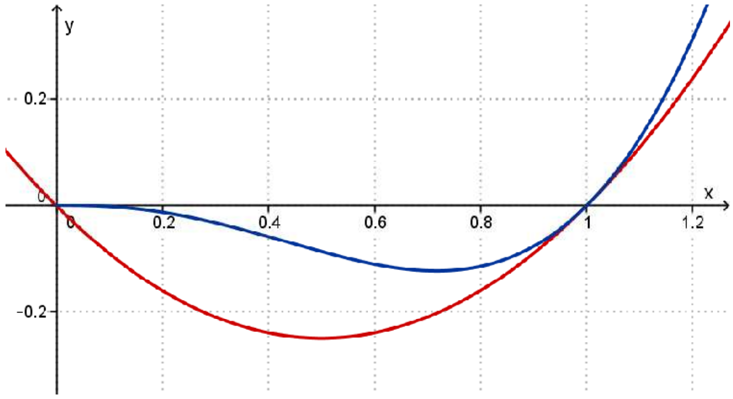
La tangente al grafico di $f(x) = x^3\ln x$ *coefficiente angolare uguale a 1.*
Infatti $f^{I}(x) = x^2(1+3\ln x)$ *e* $f^{I}(1) = 1^2(1+3\ln 1) = 1\cdot(1+3\cdot 0) = 1$

La tangente al grafico di $y = ax^2 - ax$ *coefficiente angolare uguale ad* a *.*
Infatti $g^{I}(x) = 2ax - a$ *e* $g^{I}(1) = 2a\cdot 1 - a = a$

Imponendo l'uguaglianza fra i coefficienti angolari delle rette tangenti si ottiene: $a = 1$ *.*

Pertanto la parabola richiesta ha equazione: $y = x^2 - x$.

Punto 3



L'area richiesta è data dal seguente integrale improprio:

$S = lim_{a\to 0^+} \int_a^1 -x^3 \ln x \ dx \ =$

Determiniamo la primitiva della funzione $y = x^3 \ln x$

con il metodo di integrazione per parti.

$$\int f^I(x) \cdot g(x) \ dx \ = \ f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g^I(x) \ dx$$

$$\int x^3 \ln x \ dx \ = \ \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} \ dx \ =$$

$$= \ \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx \ = \ \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c$$

Pertanto

$$S \ = \ \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 -x^3 \ln x \ dx \ = \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{x^4}{4} \ln x + \frac{x^4}{16} \right]_a^1 \ = \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{16} - \left(-\frac{a^4}{4} \ln a + \frac{a^4}{16} \right) \right] \ =$$

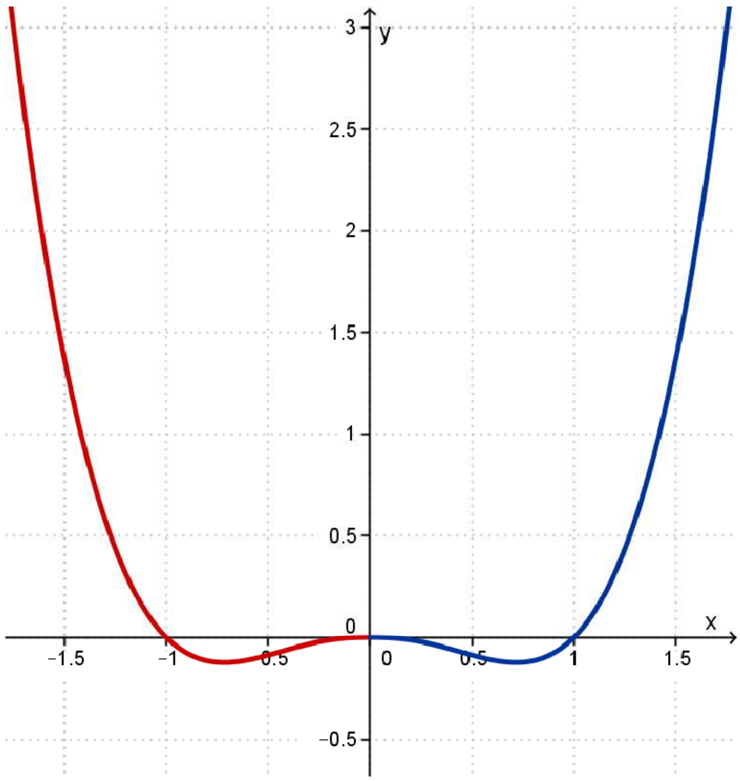
$$= \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{1}{16} + \frac{a^4}{4} \ln a - \frac{a^4}{16} \right] = \frac{1}{16} dm^2 = \frac{10000}{16} mm^2 = 625 \ mm^2$$

dove $\lim_{a\to 0^+} \dfrac{a^4}{4} \ln a = 0 \cdot (-\infty) = ?$

$$= \frac{1}{4} \lim_{a\to 0^+} \frac{\ln a}{\frac{1}{a^4}} = \frac{-\infty}{+\infty} = ? \quad \overset{H}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{4} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{4}{a^5}} \ = \ \frac{1}{4} \lim_{x\to 0^+} -\frac{a^4}{4} \ = 0^-$$

Punto 4

L'equazione della curva simmetrica di γ *rispetto all'asse y si ottiene applicando le equazioni della simmetria rispetto all'asse y* $\begin{cases} x^I = -x \\ y^I = +y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g(x) = -x^3 \ln(-x)$



L'equazione della curva simmetrica di γ *rispetto alla retta* $y = -1$ *si ottiene applicando le equazioni della simmetria rispetto alla retta* $y = q$

$\begin{cases} x^I = x \\ y^I = -y + 2q \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^I = x \\ y^I = -y + 2 \cdot (-1) \end{cases}$ $\quad\begin{cases} x^I = x \\ y^I = -y - 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \qquad -y - 2 = x^3 \ln x \ ; \qquad\qquad y = -2 - x^3 \ln(x)\ ;$